空間内の 2 直線 $\ell$, $m$ はねじれの位置にあるとする．$\ell$ と $m$ の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

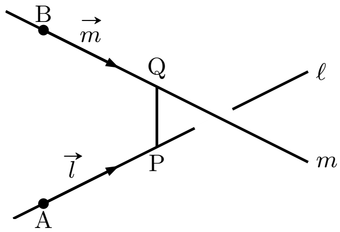
(24 大阪大 理系 3)

---

【答】 略

---

【解答】




$\ell$ 上の 1 点を A，方向ベクトルを $\overrightarrow{\ell}$ $(\neq \overrightarrow{0})$ とおくと，$\ell$ 上の点 P は実数 $s$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\ell}$$

と表すことができ，$m$ 上の 1 点を B，方向ベクトルを $\overrightarrow{m}$ $(\neq \overrightarrow{0})$ とおくと，$m$ 上の点 Q は実数 $t$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{m}$$

と表すことができる．

2 直線 $\ell$, $m$ はねじれの位置にあるから，$\ell$, $m$ は

共有点をもたず，かつ平行でない．

$\ell$, $m$ は共有点をもたないから， $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \neq \overrightarrow{0}$ であり，つねに直線 PQ が存在する．$\ell$ と $m$ の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示すには

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\ell} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{m} = 0 \end{cases}$$

を満たす P，Q がただ 1 組存在することを示せばよい．

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= t\overrightarrow{m} - s\overrightarrow{\ell} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= t\overrightarrow{m} - s\overrightarrow{\ell} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases} (s\overrightarrow{\ell} - t\overrightarrow{m}) \cdot \overrightarrow{\ell} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\ell} \\ (s\overrightarrow{\ell} - t\overrightarrow{m}) \cdot \overrightarrow{m} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{m} \end{cases}$$

を満たす $s$, $t$ がただ一組存在することを示せばよい．

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\ell}|^2 s - (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m})t = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\ell} & \cdots\cdots ① \\ (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m})s - |\overrightarrow{m}|^2 t = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{m} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① $\times |\overrightarrow{m}|^2 -$ ② $\times (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m})$ より

$$\left\{|\overrightarrow{\ell}|^2|\overrightarrow{m}|^2 - (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m})^2\right\} s = (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\ell})|\overrightarrow{m}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{m}) \times (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m}) \qquad \cdots\cdots ③$$

① $\times (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m}) -$ ② $\times |\overrightarrow{\ell}|^2$ より

$$\left\{|\overrightarrow{\ell}|^2|\overrightarrow{m}|^2 - (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m})^2\right\} t = (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\ell}) \times (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m}) - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{m})|\overrightarrow{\ell}|^2 \qquad \cdots\cdots ④$$

$\ell$, $m$ は平行でないから，$\overrightarrow{\ell}$, $\overrightarrow{m}$ のなす角を $\theta$ とおくと，$\theta \neq 0$, $\pi$ であり

$$|\overrightarrow{\ell}|^2|\overrightarrow{m}|^2 - (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m})^2 = |\overrightarrow{\ell}|^2|\overrightarrow{m}|^2(1 - \cos^2\theta) \neq 0$$

である．したがって，$s$, $t$ は

$$s = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\ell})|\overrightarrow{m}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{m}) \times (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m})}{|\overrightarrow{\ell}|^2|\overrightarrow{m}|^2 - (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m})^2}$$

$$t = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\ell}) \times (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m}) - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{m})|\overrightarrow{\ell}|^2}{|\overrightarrow{\ell}|^2|\overrightarrow{m}|^2 - (\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{m})^2}$$

としてただ一組の解をもつ．すなわち，$\ell$ と $m$ の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することが示された．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

- $\ell$ 上の 1 点を A，方向ベクトルを $\overrightarrow{\ell}\ (\neq \overrightarrow{0})$ とおくと，$\ell$ 上の点 P は実数 $s$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\ell}$$

と表すことができ，$m$ 上の 1 点を B，方向ベクトルを $\overrightarrow{m}\ (\neq \overrightarrow{0})$ とおくと，$m$ 上の点 Q は実数 $t$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{m}$$

と表すことができる．

2 直線 $\ell$, $m$ はねじれの位置にあるから，$\ell$, $m$ は

共有点をもたず，かつ平行でない．

$\overrightarrow{\ell}$, $\overrightarrow{m}$ は $\overrightarrow{0}$ でなく，平行でないから，$\overrightarrow{\ell}$, $\overrightarrow{m}$ に垂直な $\overrightarrow{0}$ でないベクトル $\overrightarrow{n}$ が存在する．$\overrightarrow{\ell}$, $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ は 1 次独立であるから，実数 $p$, $q$, $r$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = p\overrightarrow{\ell} + q\overrightarrow{m} + r\overrightarrow{n}$$

と表すことができる．これは

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = p\overrightarrow{\ell} + q\overrightarrow{m} + r\overrightarrow{n}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} - q\overrightarrow{m} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + p\overrightarrow{\ell}) = r\overrightarrow{n} \qquad \cdots\cdots ㋐$$

と変形することができる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + p\overrightarrow{\ell}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - q\overrightarrow{m}$$

となる点 P，Q はそれぞれ直線 $\ell$, $m$ 上の点である．このとき，㋐は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\overrightarrow{n} \qquad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = r\overrightarrow{n}$$

である．$\ell$, $m$ は共有点をもたないから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \neq \overrightarrow{0}$ であり，$\overrightarrow{n}$ と平行である．すなわち，直線 PQ は $\ell$ と $m$ の両方に直交する直線である (存在すること)．

次に，$\ell$ と $m$ の両方に直交する直線 PQ はただ 1 つであることを示す．

$\ell$ 上に P，P$'$，$m$ 上に Q，Q$'$ があり，PQ，P$'$Q$'$ がともに $\ell$ と $m$ の両方に直交するとする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}} + \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} + \overrightarrow{\mathrm{Q'Q}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{0}$$

が成り立つ．実数 $a$, $b$, $c$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}} = a\overrightarrow{\ell},\ \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} = b\overrightarrow{n},\ \overrightarrow{\mathrm{Q'Q}} = c\overrightarrow{m}$$

と表すことができ

$$a\overrightarrow{\ell} + b\overrightarrow{n} + c\overrightarrow{m} - r\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$$

$$\therefore \quad a\overrightarrow{\ell} + c\overrightarrow{m} + (b-r)\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$$

となる．$\overrightarrow{\ell}$, $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ は 1 次独立であるから

$$\begin{cases} a = c = 0 \\ b - r = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{PP'}} = \overrightarrow{0},\ \overrightarrow{\mathrm{Q'Q}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} \end{cases}$$

であり，P と P$'$，Q と Q$'$ は一致し，直線 PQ と直線 P$'$Q$'$ は一致する (一意性)．

以上より，$\ell$ と $m$ の両方に直交する直線がただ 1 つ存在する．