t を正の実数とし，4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$\left(4\sqrt{2},\ 0,\ 0\right)$，B$(0,\ 1,\ 1)$，P$\left(\sqrt{2},\ 3t,\ -3t\right)$ を頂点とする四面体を考える．また，辺 AP を $2:1$ に内分する点を Q とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の両方に垂直であることを示せ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が垂直となる t の値 t_0 を求めよ．
(3) (2) の t_0 に対して，$t=t_0$ とする．四面体 OABP の体積を求めよ．

(24 室蘭工大 5)

【答】

(1) 略
(2) $t_0=1$
(3) $4\sqrt{2}$

【解答】

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}\left(4\sqrt{2},\ 0,\ 0\right),\ \mathrm{B}(0,\ 1,\ 1),\ \mathrm{P}\left(\sqrt{2},\ 3t,\ -3t\right)$$

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を計算すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\times 4\sqrt{2}+1\times 0+1\times 0=0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0\times \sqrt{2}+1\times 3t+1\times(-3t)=0$$

より，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の両方に垂直である． ……(証明終わり)

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(-3\sqrt{2},\ 3t,\ -3t\right)$$

である．また，Q は辺 AP を $2:1$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{3}=\left(2\sqrt{2},\ 2t,\ -2t\right)$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が垂直となる t の値 t_0 は

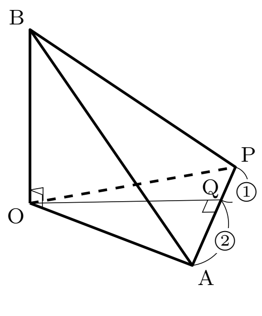
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$$
$$(-3\sqrt{2})\times 2\sqrt{2}+3t_0\times 2t_0+(-3t_0)\times(-2t_0)=0$$
$$12({t_0}^2-1)=0$$

$t_0>0$ より

$$\boldsymbol{t_0=1}$$ ……(答)

である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\triangle\mathrm{OAP}$ に垂直であり，四面体 OABP の体積 V は



$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAP}\times|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$$

である．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より $\triangle\mathrm{OAP}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$$

である．$t=1$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(-3\sqrt{2},\ 3,\ -3\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(2\sqrt{2},\ 2,\ -2\right)$$

であり

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{18+9+9}=6,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{8+4+4}=4$$

である．また，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{2}$ であるから

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times 6\times 4\right)\times\sqrt{2}=\boldsymbol{4\sqrt{2}}$$ ……(答)

である．