座標空間における 4 点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{7}{3},\ 2,\ -1\right)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{5}{3},\ -1,\ 4\right)$，$\mathrm{C}\left(0,\ 2,\ \dfrac{2}{3}\right)$，$\mathrm{D}(4,\ 5,\ -1)$ に対し，A と B を通る直線を ℓ，C と D を通る直線を m とする．このとき，ℓ と m の交点の座標を求めよ．

(24 札幌医大 1(2))

【答】 $\left(-2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

【解答】

ℓ は $\mathrm{A}\left(-\dfrac{7}{3},\ 2,\ -1\right)$ と $\mathrm{B}\left(-\dfrac{5}{3},\ -1,\ 4\right)$ を通る直線であるから，ℓ 上の点 $(x,\ y,\ z)$ は実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\ell : (x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \left(-\frac{7}{3},\ 2,\ -1\right) + s\left(\frac{2}{3},\ -3,\ 5\right)\end{aligned}$$

と表すことができる．

m は $\mathrm{C}\left(0,\ 2,\ \dfrac{2}{3}\right)$ と $\mathrm{D}(4,\ 5,\ -1)$ を通る直線であるから，m 上の点 $(x,\ y,\ z)$ は実数 t を用いて

$$\begin{aligned}m : (x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} \\ &= \left(0,\ 2,\ \frac{2}{3}\right) + t\left(4,\ 3,\ -\frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

と表すことができる．

ℓ と m の交点では

$$\begin{cases} -\dfrac{7}{3} + \dfrac{2}{3}s = 4t \\ 2 - 3s = 2 + 3t \\ -1 + 5s = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{3}t \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 2s - 12t = 7 & \cdots\cdots ① \\ s + t = 0 & \cdots\cdots ② \\ 3s + t = 1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．②，③ より

$$s = \frac{1}{2}, \quad t = -\frac{1}{2}$$

これは ① を満たす．

よって交点の座標は

$$\boldsymbol{\left(-2,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．