座標空間内の点 A$(0,\ -1,\ 1)$ をとる．xy 平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする．

(i) P は原点 O と異なる．

(ii) $\angle\mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii) $\angle\mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ．

(24 東京大 理 1)

【答】 略

【解答】

P は xy 平面上の点で条件 (i) を満たすことより，その座標を

$$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)\ (x^2+y^2 \neq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ -1,\ 1)$ であり

$$\begin{aligned}
\text{条件 (ii)} &\iff \cos\angle\mathrm{AOP} \leqq \cos\frac{2}{3}\pi\\
&\iff \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} \leqq -\frac{1}{2}\\
&\iff \frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leqq -\frac{1}{2}\\
&\iff \sqrt{2}y \geqq \sqrt{x^2+y^2} \quad (\because\ ①)\\
&\iff \begin{cases} 2y^2 \geqq (x^2+y^2)\\ y \geqq 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} (y+x)(y-x) \geqq 0\\ y \geqq 0\end{cases} \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(0,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y+1,\ -1)$ であるから

$$\begin{aligned}
\text{条件 (iii)} &\iff \cos\angle\mathrm{OAP} \geqq \cos\frac{\pi}{6}\\
&\iff \frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \frac{(y+1)+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \sqrt{2}(y+2) \geqq \sqrt{3}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}\\
&\iff \begin{cases} 2(y^2+4y+4) \geqq 3\{x^2+(y^2+2y+1)+1\}\\ y+2 \geqq 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 3x^2+y^2-2y \leqq 2\\ y \geqq -2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x^2+\dfrac{(y-1)^2}{3} \leqq 1\\ y \geqq -2\end{cases} \qquad \cdots\cdots ③
\end{aligned}$$

以上,「① かつ ② かつ ③」を満たす点 $(x,\ y,\ 0)$ の集合が P のとりうる範囲である．

図示すると下図の斜線部分となる．境界は原点のみ除く．