xyz 空間において，点 $\mathrm{P}_1(3,\ -1,\ 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $\mathrm{P}_2(5,\ 0,\ -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える．

(1) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ．

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ．この交わりは円となる．この円を C とし，その中心を P_3 とする．C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ．

(3) (2) の円 C に対し，C を含む平面を H とする．xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ．

(4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ．また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ．

(24 東北大 理系 4)

【答】

(1) 3

(2) 証明略．半径 1，P_3 の座標 $\left(\dfrac{13}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

(3) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,\ -2,\ 0)$

(4) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{65-4\sqrt{5}}{15},\ -\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15},\ -\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$ のとき，最大値 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}$

【解答】

(1) $\mathrm{P}_1(3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(5,\ 0,\ -1)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 &= \sqrt{(5-3)^2+\{0-(-1)\}^2+(-1-1)^2}\\ &= \sqrt{4+1+4}\\ &= \mathbf{3}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつ条件は

$$(\text{半径の差}) < (\text{中心間の距離}) < (\text{半径の和}) \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことである．本問では

$$(\text{半径の差}) = \sqrt{5}-\sqrt{2}\ (<3-1=2)$$
$$(\text{中心間の距離}) = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = 3 \quad (\because\ (1))$$
$$(\text{半径の和}) = \sqrt{5}+\sqrt{2}\ (>2+1=3)$$

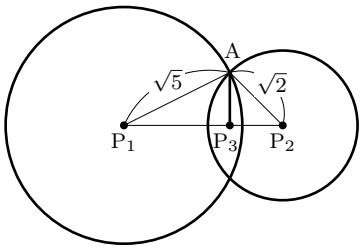
であり，$(*)$ は成り立つ．

よって，S_1 と S_2 は交わりをもつ．　……(証明終わり)

交わりの円 C 上に点 A をとり，点 A から線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ に下ろした垂線の足が円 C の中心 P_3 であるから

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3+\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$$

が成り立つ．円 C の半径を r とおくと，三平方の定理より



$$\sqrt{5-r^2}+\sqrt{2-r^2}=3$$
$$5-r^2=(3-\sqrt{2-r^2})^2$$
$$5-r^2=9-6\sqrt{2-r^2}+2-r^2$$
$$6\sqrt{2-r^2}=6$$
$$2-r^2=1 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{r=1}\ (>0)$$

……(答)

$\mathrm{P_1P_3}=\sqrt{5-1^2}=2$，$\mathrm{P_3P_2}=\sqrt{2-1^2}=1$ であり，$\mathrm{P_3}$ は線分 $\mathrm{P_1P_2}$ を $2:1$ に内分する点であるから，$\mathrm{P_3}$ の座標は

$$\left(\frac{3+2\times5}{3},\ \frac{-1+2\times0}{3},\ \frac{1+2\times(-1)}{3}\right)$$

すなわち　$\boldsymbol{\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)}$　……(答)

である．

(3) xy 平面に平行なベクトルは a，b を実数として $(a,\ b,\ 0)$ をおくことができる．$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(2,\ 1,\ -2)$ は平面 H に垂直であるから，xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトル $(a,\ b,\ 0)$ は

$$\begin{cases}(a,\ b,\ 0)\cdot(2,\ 1,\ -2)=0\\ a^2+b^2+0^2=1\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}2a+b=0\\ a^2+b^2=1\end{cases}$$

を満たす．$b=-2a$ であり

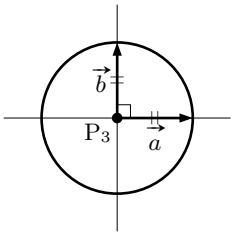
$$a^2+(-2a)^2=1\qquad\therefore\quad a=\pm\frac{1}{\sqrt5}$$

である．よって，求めるベクトルのすべては

$$\boldsymbol{\pm\frac{1}{\sqrt5}(1,\ -2,\ 0)}$$　……(答)

である．

(4) $\vec{a}=\frac{1}{\sqrt5}(1,\ -2,\ 0)$ とおく．$\vec{a}$ に垂直かつ平面 H なベクトルは，$\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(2,\ 1,\ -2)$ の両方に垂直である．そのようなベクトルで大きさが 1 のベクトルを $(p,\ q,\ r)$ とおくと



$$\begin{cases}(1,\ -2,\ 0)\cdot(p,\ q,\ r)=0\\ (2,\ 1,\ -2)\cdot(p,\ q,\ r)=0\\ p^2+q^2+r^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}p-2q=0\\ 2p+q-2r=0\\ p^2+q^2+r^2=1\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}p=2q\\ 5q-2r=0\\ p^2+q^2+r^2=1\end{cases}$$

である．これを解くと

$$4q^2+q^2+\frac{25}{4}q^2=1\qquad\therefore\quad q=\pm\frac{2}{3\sqrt5}$$

$$\therefore\quad(p,\ q,\ r)=\pm\frac{1}{3\sqrt5}(4,\ 2,\ 5)$$

$\vec{b}=\frac{1}{3\sqrt5}(4,\ 2,\ 5)$ とおくと，円 C 上の点 Q は実数 θ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}+(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}$$

と表すことができる．成分で表すと

$$(p,\ q,\ r)=\frac{1}{3}(13,\ -1,\ -1)+\frac{\cos\theta}{\sqrt5}(1,\ -2,\ 0)+\frac{\sin\theta}{3\sqrt5}(4,\ 2,\ 5)$$

である．Q と xy 平面の距離 d は，z 成分 r の絶対値であるから

$$d=\left|-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt5}{3}\sin\theta\right|$$

であり，d は

$$\sin\theta = -1 \text{ のとき，最大値 } \quad \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．このとき $\cos\theta = 0$ であり，点 Q の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{65-4\sqrt{5}}{15},\ -\frac{5+2\sqrt{5}}{15},\ -\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．