座標空間において，2 点 A$(0,\ -4,\ 6)$，B$(-12,\ 4,\ 0)$ を直径の両端とする球面を S とし，S が xy 平面，yz 平面，zx 平面と交わってできる円をそれぞれ C_1，C_2，C_3 とする．そして，C_1，C_2，C_3 の中心をそれぞれ P_1，P_2，P_3 とし，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の重心を G とする．以下の問いに答えよ．

(1) 球面 S の中心の座標を求めよ．
(2) 球面 S の方程式を求めよ．
(3) 円 C_2 の方程式を求めよ．
(4) 点 G の座標を求めよ．
(5) 四面体 $\mathrm{AP}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の体積 V を求めよ．
(6) 3 点 A，P_1，P_2 の定める平面 $\mathrm{AP}_1\mathrm{P}_2$ 上に点 R$(0,\ r,\ r)$ があるとき，r の値を求めよ．

(24 豊橋技科大 2)

【答】

(1) $(-6,\ 0,\ 3)$
(2) $(x+6)^2+y^2+(z-3)^2=61$
(3) $\begin{cases} y^2+(z-3)^2=25 \\ x=0 \end{cases}$
(4) $(-4,\ 0,\ 2)$
(5) $V=12$
(6) $r=\dfrac{12}{7}$

【解答】

(1) S は A$(0,\ -4,\ 6)$，B$(-12,\ 4,\ 0)$ を直径の両端とする球面であるから，球面 S の中心は線分 AB の中点である．中心の座標は

$$\left(\frac{0-12}{2},\ \frac{-4+4}{2},\ \frac{6+0}{2}\right) \text{ すなわち } \boldsymbol{(-6,\ 0,\ 3)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 球面 S の半径は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(0+12)^2+(-4-4)^2+(6-0)^2}=\frac{\sqrt{244}}{2}=\sqrt{61}$$

であり，球面 S の方程式は

$$\boldsymbol{(x+6)^2+y^2+(z-3)^2=61} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) C_2 は S が yz 平面と交わってできる円であるから，円 C_2 の方程式は

$$\begin{cases} (x+6)^2+y^2+(z-3)^2=61 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} \boldsymbol{y^2+(z-3)^2=25} \\ \boldsymbol{x=0} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) (3) と同様にして

$$C_1 : \begin{cases} (x+6)^2+y^2+(z-3)^2=61 \\ z=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} (x+6)^2+y^2=52 \\ z=0 \end{cases}$$

$$C_3 : \begin{cases} (x+6)^2+y^2+(z-3)^2=61 \\ y=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} (x+6)^2+(z-3)^2=61 \\ y=0 \end{cases}$$

であり，C_1，C_2，C_3 の中心 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P_1}(-6,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{P_2}(0,\ 0,\ 3),\quad \mathrm{P_3}(-6,\ 0,\ 3)$$

である．よって，$\triangle\mathrm{P_1P_2P_3}$ の重心 G の座標は

$$\left(\frac{-6+0-6}{3},\ \frac{0+0+0}{3},\ \frac{0+3+3}{3}\right) \text{ すなわち } \boldsymbol{(-4,\ 0,\ 2)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) (3) で求めた $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ の座標をみると y 座標はすべて 0 であるから，$\triangle\mathrm{P_1P_2P_3}$ は zx 平面上にあり

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}(\triangle\mathrm{P_1P_2P_3} \text{ の面積}) \times |\mathrm{A} \text{ の } y \text{ 座標}| \\ &= \frac{4}{3}(\triangle\mathrm{P_1P_2P_3} \text{ の面積}) \end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{P_3P_1}}=(0,\ 0,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_3P_2}}=(6,\ 0,\ 0)$ であり

$$\begin{aligned} (\triangle\mathrm{P_1P_2P_3} \text{ の面積}) &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_1}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_2}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{P_3P_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_3P_1}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{9\times 36-0} \\ &= 9 \end{aligned}$$

よって

$$V=\frac{4}{3}\times 9=\mathbf{12} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(6) 3 点 A, $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ の定める平面 $\mathrm{AP_1P_2}$ 上に点 $\mathrm{R}(0,\ r,\ r)$ があるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=s\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP_2}}$$

を満たす実数 s，t が存在することである．

$$(0,\ r+4,\ r-6)=s(-6,\ 4,\ -6)+t(0,\ 4,\ -3)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 0=-6s \\ r+4=4s+4t \\ r-6=-6s-3t \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} s=0 \\ r-4t=-4 \\ r+3t=6 \end{cases}$$

$$\therefore \quad s=0,\ t=\frac{10}{7},\ \boldsymbol{r=\frac{12}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．