$x = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$ のとき，次の (i) と (ii) の式の値をそれぞれ求めよ．

(i) $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

(ii) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$

(25 茨城大 工 2(1))

【答】

(i) $2\sqrt{5}$
(ii) 7

【解答】

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

(i)
$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= \frac{2}{\sqrt{5}-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

であるから

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (\sqrt{5})^3 - 3\sqrt{5} = \mathbf{2\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) (i) を利用すると

$$\begin{aligned} x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - x^2 - \frac{1}{x^2} \\ &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x}\right\} \\ &= 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - (5-2) \\ &= \mathbf{7} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．