x の整式 A を x^2+x+1 で割った余りを $r[A]$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) ① $r[3x^2+x-4]$

② $r[x^3+1]$

③ $r[(3x^2+x-4)(x^3+1)]$

④ $r[r[3x^2+x-4]\times r[x^3+1]]$

をそれぞれ求めよ．

(2) x の整式 A, B に対して，$r[AB]=r[r[A]\times r[B]]$ となることを示せ．

(25 鳥取大 地域・農 (生) 3)

【答】

(1) ① $-2x-7$　② 2　③ $-4x-14$　④ $-4x-14$

(2) 略

【解答】

(1) A を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q[A]$ とおくと，余りは $r[A]$ であるから

$$A=(x^2+x+1)Q[A]+r[A]$$

が成り立つ．ここで，$r[A]$ は 0 か，1 次以下の整式である．

①：$3x^2+x-4=(x^2+x+1)\cdot 3+(-2x-7)$ であるから

$$r[3x^2+x-4]=\boldsymbol{-2x-7}$$ ……(答)

である．

②：$x^3+1=(x^2+x+1)\cdot(x-1)+2$ であるから

$$r[x^3+1]=\boldsymbol{2}$$ ……(答)

である．

$$\begin{array}{r}
x\ \ -1\\
x^2+x+1\,\overline{\big)\,x^3+1}\\
\underline{x^3+x^2+x}\\
-x^2-x+1\\
\underline{-x^2-x-1}\\
2
\end{array}$$

③：①，② での変形を用いる．

$$\begin{aligned}
&(3x^2+x-4)(x^3+1)\\
&=\{(x^2+x+1)\cdot 3+(-2x-7)\}\{(x^2+x+1)\cdot(x-1)+2\}\\
&=(x^2+x+1)(x\text{ の整式})+2(-2x-7)
\end{aligned}$$

であるから

$$r[(3x^2+x-4)(x^3+1)]=\boldsymbol{-4x-14}$$ ……(答)

である．

④：①，② より

$$r[3x^2+x-4]\times r[x^3+1]=(-2x-7)\times 2=(x^2+x+1)\cdot 0-4x-14$$

であるから

$$r[r[3x^2+x-4]\times r[x^3+1]]=\boldsymbol{-4x-14}$$ ……(答)

である．

- (2) の等式を用いると ③，④ は次のように処理できる．

$$\begin{aligned}
&r[(3x^2+x-4)(x^3+1)]\quad(\text{これは③})\\
&=r[r[3x^2+x-4]r[x^3+1]]\quad(\because\ (2)\text{ の等式．これは④})\\
&=r[(-2x-7)\cdot 2]\quad(\because\ ①,\ ②)\\
&=r[-4x-14]\\
&=-4x-14
\end{aligned}$$

(2) A を x^2+x+1 で割った商を $Q[A]$，余り $r[A]$，B を x^2+x+1 で割った商を $Q[B]$，余り $r[B]$ とおくと

$$\begin{aligned} A &= (x^2+x+1)Q[A]+r[A] \\ B &= (x^2+x+1)Q[B]+r[B] \end{aligned}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned} AB &= \{(x^2+x+1)Q[A]+r[A]\}\{(x^2+x+1)Q[B]+r[B]\} \\ &= (x^2+x+1)Q_1+r[A]r[B] \quad (Q_1 \text{は } x \text{ の整式}) \end{aligned}$$

である．$r[A]r[B]$ は 2 次以下の x の整式であるから，$r[A]r[B]$ を x^2+x+1 で割った余りを Q_2 とおくと

$$r[A]r[B] = (x^2+x+1)Q_2+r[r[A]r[B]]$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} AB &= (x^2+x+1)Q_1+(x^2+x+1)Q_2+r[r[A]r[B]] \\ &= (x^2+x+1)(Q_1+Q_2)+r[r[A]r[B]] \end{aligned}$$

となる．よって

$$r[AB] = r[r[A]r[B]]$$

が成り立つ． ……(証明終わり)