t を実数とする．x の 2 次方程式 $x^2-(2t^2-3)x+t^4-7t^2+6t=0 \cdots (*)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x=0$ が $(*)$ の解となる t の値をすべて求めよ．

(2) $a,\ b,\ c,\ d$ を実数とする．すべての実数 t について $x=t^2+at+b$ および $x=t^2+ct+d$ が $(*)$ の解となる $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ．ただし，$b>d$ とする．

(3) (2) の $a,\ b,\ c,\ d$ に対し，$\alpha=t^2+at+b,\ \beta(t)=t^2+ct+d$ として，関数 $f(t)$ を以下の式で定める．

$$f(t)=\begin{cases}|\alpha(t)| & (|\alpha(t)| \geqq |\beta(t)| \text{ のとき}) \\ |\beta(t)| & (|\alpha(t)|<|\beta(t)| \text{ のとき})\end{cases}$$

t が実数全体を動くとき，$f(t)$ の最小値を求めよ．

(25 徳島大 医・歯・薬 2)

【答】

(1) $t=0,\ 1,\ 2,\ -3$
(2) $a=-2,\ b=0,\ c=2,\ d=-3$
(3) $\dfrac{15}{16}$

【解答】

$$x^2-(2t^2-3)x+t^4-7t^2+6t=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) $f(x)=x^2-(2t^2-3)x+t^4-7t^2+6t$ とおく．

$x=0$ が $(*)$ の解となる条件は

$$f(0)=0$$
$$t^4-7t^2+6t=0$$
$$t(t-1)(t-2)(t+3)=0$$

0	1	0	−7	6	0
		0	0	0	0
1	1	0	−7	6	0
		1	1	−6	
2	1	1	−6	0	
		2	6		
	1	3	0		

であり，求める t の値のすべては

$$\boldsymbol{t=0,\ 1,\ 2,\ -3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $x=t^2+at+b$ が $(*)$ の解となる条件は

$$f(t^2+at+b)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

$$\begin{aligned}f(t^2+at+b)&=(t^2+at+b)^2-(2t^2-3)(t^2+at+b)+t^4-7t^2+6t \\ &=(t^4+a^2t^2+b^2+2at^3+2abt+2bt^2) \\ &\qquad -\{2t^4+2at^3+(2b-3)t^2-3at-3b\}+t^4-7t^2+6t \\ &=(a^2-4)t^2+(2ab+3a+6)t+b^2+3b\end{aligned}$$

であり，すべての実数 t に対して ① が成り立つから

$$\begin{cases}a^2-4=0 \\ 2ab+3a+6=0 \\ b^2+3b=0\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}a=\pm 2 \\ 2ab+3a+6=0 \\ b=0,\ -3\end{cases}$$

3 式を満たす組 $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b)=(-2,\ 0),\ (2,\ -3) \qquad \cdots\cdots ①'$$

である．

　同じく，$x=t^2+ct+d$ が $(*)$ の解となる条件は

$$f(t^2+ct+d)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

であり，① の $a,\ b$ をそれぞれ $c,\ d$ にかえて

$$(c,\ d)=(-2,\ 0),\ (2,\ -3) \qquad \cdots\cdots ②'$$

を得る．①$'$, ②$'$ かつ $b>d$ を満たす $a,\ b,\ c,\ d$ の値は

$$\boldsymbol{a=-2,\ b=0,\ c=2,\ d=-3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $x=t^2+at+b$ および $x=t^2+ct+d$ が $(*)$ の解となる条件は

$$\begin{cases}(t^2+at+b)+(t^2+ct+d)=2t^2-3 & \cdots\cdots ㋐\\(t^2+at+b)(t^2+ct+d)=t^4-7t^2+6t & \cdots\cdots ㋑\end{cases}$$

である．㋐ は

$$2t^2+(a+c)t+b+d=2t^2-3$$

であり，これがすべての実数 t について成り立つことから

$$\begin{cases}a+c=0 & \cdots\cdots ㋒\\b+d=-3 & \cdots\cdots ㋓\end{cases}$$

が成り立つ．㋑ もすべての実数 t について成り立つから，$t=0,\ 1$ とすると

$$\begin{cases}bd=0 & \cdots\cdots ㋔\\(1+a+b)(1+c+d)=0 & \cdots\cdots ㋕\end{cases} \qquad (\because\ t=0,\ 1 \text{ は } (1) \text{ の利用を考えた})$$

が成り立つ (必要)．

㋓, ㋔ より，$b,\ d$ は 2 次方程式 $u^2+3u=0$ の解であり

$$(b,\ d)=(-3,\ 0),\ (0,\ -3)$$

$b>d$ とあわせると

$$(b,\ d)=(0,\ -3)$$

である．このとき ㋒, ㋕ は

$$\begin{cases}a+c=0\\(a+1)(c-2)=0\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}c=-a\\(a+1)(-a-2)=0\end{cases}$$

$$\therefore \quad (a,\ c)=(-1,\ 1),\ (-2,\ 2)$$

(i) $(a,\ b,\ c,\ d)=(-1,\ 0,\ 1,\ -3)$ のとき

$$(㋑\text{の左辺})=(t^2-t)(t^2+t-3)=t^4-4t^2+3t$$

となり，㋑がすべての実数 t について成立することに反する．

(ii) $(a,\ b,\ c,\ d)=(-2,\ 0,\ 2,\ -3)$ のとき

$$(㋑\text{の左辺})=(t^2-2t)(t^2+2t-3)=t^4-7t^2+6t$$

となり，㋑がすべての実数 t について成立する (十分)．

よって，$a,\ b,\ c,\ d$ の値は

$$a=-2,\ b=0,\ c=2,\ d=-3$$

である．

(3) (2) の結果より，$\alpha(t)=t^2-2t$, $\beta(t)=t^2+2t-3$ である．

$$f(t)=\begin{cases}|\alpha(t)| & (|\alpha(t)| \geqq |\beta(t)| \text{ のとき}) \\ |\beta(t)| & (|\alpha(t)| < |\beta(t)| \text{ のとき})\end{cases}$$

$y=|\alpha(t)|$，$y=|\beta(t)|$ のグラフを考える．$|\alpha(t)|=|\beta(t)|$ となるのは

$$\begin{aligned} & |t^2-2t|=|t^2+2t-3| \\ \Longleftrightarrow\ & t^2-2t=\pm(t^2+2t-3) \\ \Longleftrightarrow\ & 4t-3=0 \quad \text{または} \quad 2t^2-3=0 \\ & \therefore \quad t=\frac{3}{4},\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である．また，それらの t に対する $|\alpha(t)|$ の値は

$$\left|\alpha\left(\frac{3}{4}\right)\right|=\left|\frac{9}{16}-2\cdot\frac{3}{4}\right|=\frac{15}{16}$$
$$\left|\alpha\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right|=\left|\frac{3}{2}-2\sqrt{\frac{3}{2}}\right|=\sqrt{6}-\frac{3}{2}$$
$$\left|\alpha\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right|=\left|\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{3}{2}}\right|=\sqrt{6}+\frac{3}{2}$$

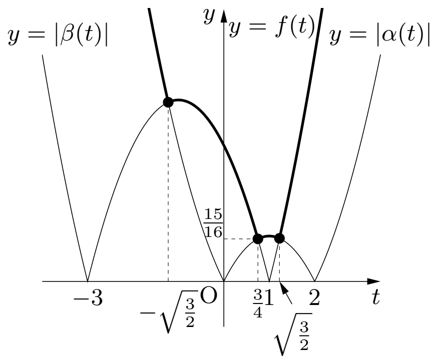
$\dfrac{15}{16}$ と $\sqrt{6}-\dfrac{3}{2}$ の大小を比較する．

$$\left(\sqrt{6}-\frac{3}{2}\right)-\frac{15}{16}=\frac{16\sqrt{6}-39}{16}=\frac{\sqrt{1536}-\sqrt{1521}}{16}>0$$

であり，3 数 $\dfrac{15}{16}$, $\sqrt{6}-\dfrac{3}{2}$, $\sqrt{6}+\dfrac{3}{2}$ の大小，すなわち $\left|\alpha\left(\dfrac{3}{4}\right)\right|$, $\left|\alpha\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)\right|$, $\left|\alpha\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)\right|$ の大小は

$$\left|\alpha\left(\frac{3}{4}\right)\right|<\left|\alpha\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right|<\left|-\alpha\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right|$$

である．したがって，$y=|\alpha(t)|$，$y=|\beta(t)|$ のグラフは右図となり，$y=f(t)$ のグラフは太線部分となる．



よって，$f(t)$ の最小値は

$$\mathbf{\frac{15}{16}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．