$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ を満たす 3 つの実数 α, β, γ に対して，

$$\alpha+\beta+\gamma=21$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=191$$
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2025$$

が成り立つとする．このとき

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$$

である．また

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=21\times\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=21\times 191$$

より，

$$\alpha\beta\gamma=\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$$

である．

α, β, γ は 3 次方程式

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

の解であるから，

$$\alpha=\boxed{7},\quad \beta=\boxed{8}-\sqrt{\boxed{9}\boxed{10}},\quad \gamma=\boxed{8}+\sqrt{\boxed{9}\boxed{10}}$$

である．

(25 青山学院大 理工 B 1)

【答】

123	456	7	8	910
125	213	3	9	10

【解答】

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=21 & \cdots\cdots ① \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=191 & \cdots\cdots ② \\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2025 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

等式

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

に ①, ② を代入すると

$$21^2=191+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$\therefore\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{2}(441-191)=\mathbf{125} \qquad \cdots\cdots ④ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，等式

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha) \qquad \cdots\cdots ㋐$$

の利用を考える．2 つの等式

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=21\times 125 \qquad \cdots\cdots ⑤$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=21\times 191 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

より，⑥，⑤ の辺々を引くと

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=21\times(191-125)$$
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=21\times 66$$
$$2025-3\alpha\beta\gamma=21\times 66 \quad (\because\ ③)$$
$$\therefore\quad \alpha\beta\gamma=\frac{2025-1386}{3}=\frac{639}{3}=\mathbf{213} \qquad \cdots\cdots ⑦ \qquad\qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

を得る．

- ⑦ は覚えておくべき等式であるが，これを用いずに ⑤ のみから $\alpha\beta\gamma$ を求めることもできる．

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ &=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+3\alpha\beta\gamma\\ &=\alpha^2(21-\alpha)+\beta^2(21-\beta)+\gamma^2(21-\gamma)+3\alpha\beta\gamma \quad (\because\ ①)\\ &=21(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+3\alpha\beta\gamma\\ &=21\times191-2025+3\alpha\beta\gamma \quad (\because\ ②,\ ③)\\ &=1986+3\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

よって，⑤ より

$$1986+3\alpha\beta\gamma=21\times125$$
$$\therefore\quad \alpha\beta\gamma=\frac{2625-1986}{3}=\frac{639}{3}=213$$

である．

つぎに，α，β，γ を求める．α，β，γ は

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

すなわち

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

の解であり，①，④，⑦ より

$$x^3-21x^2+125x-213=0$$
$$\therefore\quad (x-3)(x^2-18x+71)=0$$

3	1	-21	125	-213
		3	-54	213
	1	-18	71	0

の解である．$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ もあわせると

$$\alpha=\mathbf{3},\ \beta=\mathbf{9-\sqrt{10}},\ \gamma=9+\sqrt{10} \qquad\qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．