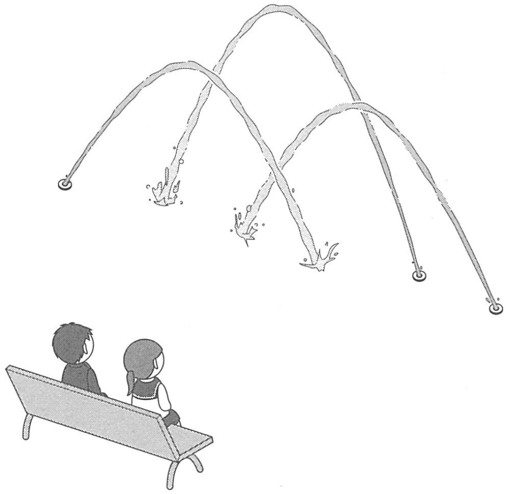
花子さんと太郎さんは，公園にある二つの小さな噴水と一つの大きな噴水の高さについて話している．

花子：あの中央の大きな噴水の高さは何メートルだろう．
太郎：実際に高さを測定するのは難しそうだね．噴水の水がえがく曲線は，放物線になると聞いたことがあるよ．
花子：じゃあ，放物線と仮定して，およその高さを考えてみよう．



参考図

花子さんと太郎さんは，噴水の高さについて次のように考えることにした．

噴水の水がえがく曲線は三つとも放物線とする．三つの噴水の水が出る位置は水平な地面にある．図1のように座標軸が定められた平面上に，三つの噴水を正面から見た図をかく．左右の小さな噴水の水がえがく放物線については後の**仮定 1** を，中央の大きな噴水の水がえがく放物線については後の**仮定 2** を設定する．図1の P_1，P_2，P_3 は噴水の水が出る位置である．なお，長さの単位はメートルであるが，以下では省略する．

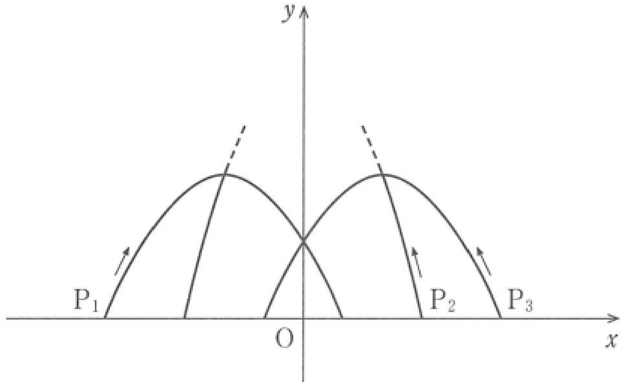


図1

仮定 1

- 左側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_1 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_1\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ から出て点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に至る．
- 右側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_3 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_3\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ から出て点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に至る．
- C_1 と C_3 はともに点 $(0,\ 1)$ を通る．

仮定 2

中央の大きな噴水の水がえがく放物線 C_2 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_2\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る．

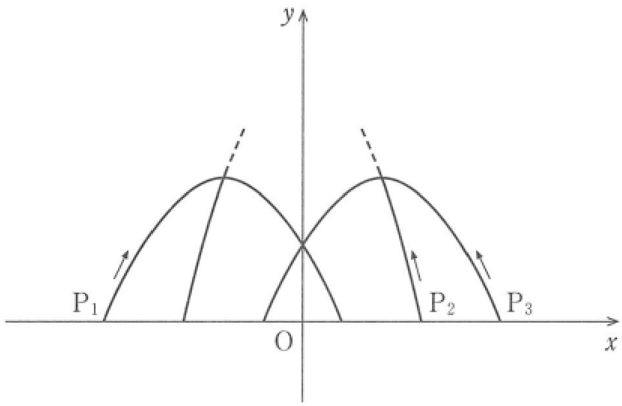


図 1(再掲)

(1) **仮定 1** と**仮定 2** のもとで考える．C_1 をグラフにもつ 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする．このとき $c = \boxed{\text{ア}}$ であり，また

$$y = -\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}x^2 - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} + \boxed{\text{ア}}$$

である．

C_1 の頂点の y 座標は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．このことを用いると，C_2 の頂点の y 座標は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ であることがわかる．

したがって，大きな噴水の高さは，小さな噴水の高さの $\boxed{\boxed{\text{シ}}}$ である．

$\boxed{\boxed{\text{シ}}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ およそ 2 倍	① およそ 3 倍
② およそ 4 倍	③ およそ 5 倍

(2) 花子さんと太郎さんは，大きな噴水の高さについて話している．

花子：正面から見たとき，大きな噴水が小さな噴水の頂点を通って見えるというデザインは変えずに，大きな噴水の高さを変えることはできるのかな．

太郎：左右の二つの小さな噴水は変えずに，大きな噴水の水が出る位置を変えてみたらどうかな．

花子：大きな噴水の高さが 5 メートルになるときの水が出る位置を考えてみよう．

仮定 2 の代わりに次の**仮定 2′** をおく．

仮定 2′

- 中央の大きな噴水の水がえがく放物線 $C_2{}'$ は，x 軸の正の部分の点 $\mathrm{P_2}'$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る．
- $C_2{}'$ の頂点の y 座標は 5 である．

仮定 1 と**仮定 2′** のもとで考える．このとき，$\mathrm{P_2}'$ は $\mathrm{P_2}$ より $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ だけ $\boxed{\text{ソ}}$ の方にある．

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ $\mathrm{P_1}$	① $\mathrm{P_3}$

(25 共通テスト 本試験 I・旧 I 3[2] IA・旧 IA 2[1])

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	クケ	コサ	シ	ス	セ	ソ
1	4	5	8	5	9	5	81	25	0	1	4	0

【解答】

(1)
$$C_1 : y = ax^2 + bx + c$$

C_1 は点 (0, 1) を通るから

$$c = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

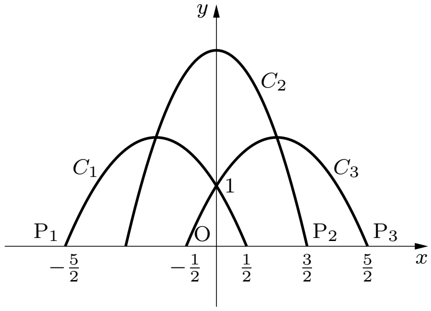
であり，x 軸上の 2 点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るから

$$y = a\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= a\left(x^2 + 2x - \frac{5}{4}\right)$$

とおくことができる．定数項は 1 なので

$$-\frac{5}{4}a = 1 \qquad \therefore \quad a = -\frac{4}{5}$$

である．



よって，C_1 をグラフにもつ 2 次関数は

$$y=-\mathbf{\frac{4}{5}}x^2-\mathbf{\frac{8}{5}}x+1 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．平方完成すると

$$y=-\frac{4}{5}(x+1)^2+\frac{9}{5}$$

であり，C_1 の頂点の y 座標は $\mathbf{\frac{9}{5}}$ である． ……(答)

C_3 は y 軸に関して C_1 と対称である．

C_2 は C_1 の頂点 $\left(-1,\ \frac{9}{5}\right)$ と C_3 の頂点 $\left(1,\ \frac{9}{5}\right)$ を通るから，y 軸に関して対称であり，x 軸上の点 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ を通るから，点 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$ も通る．C_2 をグラフにもつ 2 次関数は

$$\begin{aligned}y&=A\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\\&=A\left(x^2-\frac{9}{4}\right)\ (A\neq 0)\end{aligned}$$

と表すことができる．点 $\left(\pm1,\ \frac{9}{5}\right)$ を通るから

$$\frac{9}{5}=A\left\{(\pm1)^2-\frac{9}{4}\right\}$$

$$\therefore\quad \frac{9}{5}=-\frac{5}{4}A \qquad \therefore\quad A=-\frac{36}{25}$$

よって

$$C_2: y=-\frac{36}{25}x^2+\frac{81}{25}$$

であり．C_2 の頂点の y 座標は $\mathbf{\frac{81}{25}}$ である． ……(答)

したがって，大きな噴水の高さは，小さな噴水の高さの

$$\frac{\frac{81}{25}}{\frac{9}{5}}=\frac{9}{5}=1.8\text{ 倍，すなわち，}\textbf{およそ 2 倍}\quad\text{シは }0 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) **仮定 1** と**仮定 2′** のもとで考える．$\mathrm{P_2}'$ の座標を $(p,\ 0)\ (p>0)$ とおくと，$C_2{}'$ をグラフにもつ 2 次関数は

$$\begin{aligned}C_2{}': y&=A'(x+p)(x-p)\\&=A'(x^2-p^2)\end{aligned}$$

と表すことができる．$C_2{}'$ は C_1 の頂点 $\left(-1,\ \frac{9}{5}\right)$ と C_3 の頂点 $\left(1,\ \frac{9}{5}\right)$ を通り，頂点の y 座標が 5 であるから

$$\begin{cases}\frac{9}{5}=A'\{(\pm1)^2-p^2\}\\-A'p^2=5\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}A'-A'p^2=\frac{9}{5}\\A'p^2=-5\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}A'=-5+\frac{9}{5}=-\frac{16}{5}\\p^2=\dfrac{-5}{-\frac{16}{5}}=\frac{25}{16}\end{cases}$$

$p>0$ より $p=\frac{5}{4}$ であり，$\mathrm{P_2}'\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$ は $\mathrm{P_2}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ より

$$\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\mathbf{\frac{1}{4}}\text{ だけ }\mathbf{P_1}\text{ の方}\quad\text{ソは }0 \qquad \cdots\cdots(答)$$

にある．