

ある正の整数を 15 で割ると 8 余り, 8 で割ると割り切れず a 余る. この数を 120 で割った余りは, $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} - \boxed{4}\boxed{5}a$ である.

(25 青山学院大 経済 1(1))

【答】

123	45
128	15

【解答】

15 で割ると 8 余り, 8 で割ると割り切れず a 余るような正の整数を N とおく. N は整数 l , m を用いて

$$\begin{cases} N = 15 \cdot l + 8 \\ N = 8 \cdot m + a \quad (1 \leq a \leq 7) \end{cases}$$

と表すことができる.

$$\begin{aligned} 15 \cdot l + 8 &= 8 \cdot m + a \\ 15 \cdot l - 8(m-1) &= a \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$(l, m-1) = (-a, -2a)$ は $\textcircled{1}$ の整数解の 1 つであり

$$15 \cdot (-a) - 8(-2a) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を満たす. $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の辺々を引くと

$$\begin{aligned} 15(l+a) - 8(m-1+2a) &= 0 \\ \therefore 15(l+a) &= 8(m-1+2a) \end{aligned}$$

である. 15 と 8 は互いに素であるから, 整数 k を用いて

$$l+a = 8k \quad \therefore \quad l = 8k-a$$

と表すことができる. このとき

$$\begin{aligned} N &= 15(8k-a) + 8 \\ &= 120k + 8 - 15a \end{aligned}$$

である. a は $1 \leq a \leq 7$ を満たす整数であり $8-15a < 0$ であることに注意する. N は

$$N = 120(k-1) + 128 - 15a \quad (23 \leq 128 - 15a \leq 113)$$

と表すことができ, $k-1$ は整数, $0 \leq 128 - 15a < 120$ を満たすから, N を 120 で割ったときの商は $k-1$, 余りは

$$\mathbf{128 - 15a} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

である.