

ある正の整数を 15 で割ると 8 余り, 8 で割ると割り切れず  $a$  余る. この数を 120 で割った余りは,  $\boxed{1\ 2\ 3} - \boxed{4\ 5}a$  である.

(25 青山学院大 経済 1(1))

【答】

123	45
128	15

【解答】

15 で割ると 8 余り, 8 で割ると割り切れず  $a$  余るような正の整数を  $N$  とおく.  $N$  は整数  $l$ ,  $m$  を用いて

$$\begin{cases} N = 15 \cdot l + 8 \\ N = 8 \cdot m + a \quad (1 \leq a \leq 7) \end{cases}$$

と表すことができる.

$$\begin{aligned} 15 \cdot l + 8 &= 8 \cdot m + a \\ 15 \cdot l - 8(m - 1) &= a \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$(l, m - 1) = (-a, -2a)$  は  $\textcircled{1}$  の整数解の 1 つであり

$$15 \cdot (-a) - 8(-2a) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を満たす.  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  の辺々を引くと

$$\begin{aligned} 15(l + a) - 8(m - 1 + 2a) &= 0 \\ \therefore 15(l + a) &= 8(m - 1 + 2a) \end{aligned}$$

である. 15 と 8 は互いに素であるから, 整数  $k$  を用いて

$$l + a = 8k \quad \therefore l = 8k - a$$

と表すことができる. このとき

$$\begin{aligned} N &= 15(8k - a) + 8 \\ &= 120k + 8 - 15a \end{aligned}$$

である.  $a$  は  $1 \leq a \leq 7$  を満たす整数であり  $8 - 15a < 0$  であることに注意する.  $N$  は

$$N = 120(k - 1) + 128 - 15a \quad (23 \leq 128 - 15a \leq 113)$$

と表すことができ,  $k - 1$  は整数,  $0 \leq 128 - 15a < 120$  を満たすから,  $N$  を 120 で割ったときの商は  $k - 1$ , 余りは

$$128 - 15a \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.