

$3x + 5y = 1080$ を満たす正の整数 x と y について、次の問い合わせに答えよ。ただし、答えに至る過程を記述すること。

- (1) (x, y) の組合せの個数を求めよ。
- (2) $s = x + y$ が 6 の倍数である (x, y) の組合せの個数を求めよ。
- (3) $t = xy$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

(25 青山学院大 経済 5)

【答】

- (1) 71
- (2) 23
- (3) 最大値 19440, 最小値 1065

【解答】

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1080 & \dots \textcircled{1} \\ x, y \text{ は正の整数} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$(1) \quad 3 \cdot 0 + 5 \cdot 216 = 1080 \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ③ の辺々を引くと

$$3x + 5(y - 216) = 0$$

$$3x = 5(216 - y)$$

3 と 5 は互いに素であるから、整数 k を用いて

$$x = 5k$$

と表すことができ、このとき

$$216 - y = 3k \quad \therefore \quad y = 216 - 3k$$

である。②も考慮すると

$$\begin{cases} 5k > 0 \\ 216 - 3k > 0 \end{cases} \quad \therefore \quad 0 < k < 72$$

であり、 (x, y) の個数は

71

.....(答)

である。

$$(2) \quad s = x + y = 5k + (216 - 3k) = 216 + 2k = 2(108 + k)$$

であり、 s が 6 の倍数であるための k の条件は

$108 + k$ が 3 の倍数である

ことであり、 $108 = 3 \cdot 36$ であるから

k が 3 の倍数である

ことである。 k は $0 < k < 3 \cdot 24$ の範囲で動くから (x, y) の組合せの個数は

23

.....(答)

である。

$$(3) \quad t = xy = 5k \cdot (216 - 3k) = 15k(72 - k)$$

k は $0 < k < 72$ の範囲を動くから、 t は

$k = 36$ のとき、最大値 $15 \cdot 36 \cdot 36 = 19440$

$k = 1, 71$ のとき、最小値 $15 \cdot 1 \cdot 71 = 1065$

をとる。