

$3x + 5y = 1080$  を満たす正の整数  $x$  と  $y$  について、次の問いに答えよ。ただし、答えに至る過程を記述すること。

- (1)  $(x, y)$  の組合せの個数を求めよ。
- (2)  $s = x + y$  が 6 の倍数である  $(x, y)$  の組合せの個数を求めよ。
- (3)  $t = xy$  の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

(25 青山学院大 経済 5)

【答】

- (1) 71
- (2) 23
- (3) 最大値 19440, 最小値 1065

【解答】

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1080 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x, y \text{ は正の整数} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$(1) \quad 3 \cdot 0 + 5 \cdot 216 = 1080 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ③ の辺々を引くと

$$3x + 5(y - 216) = 0$$

$$3x = 5(216 - y)$$

3 と 5 は互いに素であるから、整数  $k$  を用いて

$$x = 5k$$

と表すことができ、このとき

$$216 - y = 3k \quad \therefore y = 216 - 3k$$

である。② も考慮すると

$$\begin{cases} 5k > 0 \\ 216 - 3k > 0 \end{cases} \quad \therefore 0 < k < 72$$

であり、 $(x, y)$  の個数は

$$\mathbf{71} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。

$$(2) \quad s = x + y = 5k + (216 - 3k) = 216 + 2k = 2(108 + k)$$

であり、 $s$  が 6 の倍数であるための  $k$  の条件は

$$108 + k \text{ が } 3 \text{ の倍数である}$$

ことであり、 $108 = 3 \cdot 36$  であるから

$$k \text{ が } 3 \text{ の倍数である}$$

ことである。 $k$  は  $0 < k < 3 \cdot 24$  の範囲で動くから  $(x, y)$  の組合せの個数は

$$\mathbf{23} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。

$$(3) \quad t = xy = 5k \cdot (216 - 3k) = 15k(72 - k)$$

$k$  は  $0 < k < 72$  の範囲を動くから、 $t$  は

$$k = 36 \text{ のとき, } \quad \text{最大値 } 15 \cdot 36 \cdot 36 = \mathbf{19440} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$k = 1, 71 \text{ のとき, } \quad \text{最小値 } 15 \cdot 1 \cdot 71 = \mathbf{1065} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

をとる。