

複素数 $z = \cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi$ について、次の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) $z^{567} + \frac{1}{z^{567}}$ の値を求めよ。
 (2) $(z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6)$ の値を求めよ。
 (3) $z + z^2 + z^3$ の実部の値を求めよ。

(25 大阪医薬大 後 医 2)

【答】

- (1) 2
 (2) 2
 (3) $-\frac{1}{2}$

【解答】

$$z = \cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi$$

- (1) $z^7 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ …… ① に着目すると

$$z^{567} + \frac{1}{z^{567}} = z^{7 \cdot 81} + \frac{1}{z^{7 \cdot 81}} = 1 + \frac{1}{1} = 2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

である。

- (2) 式を展開すると

$$\begin{aligned} & (z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6) \\ &= (z^4 + z^6 + z^7) + (z^5 + z^7 + z^8) + (z^7 + z^9 + z^{10}) \\ &= (z^4 + z^6 + 1) + (z^5 + 1 + z) + (1 + z^2 + z^3) \quad (\because \text{①}) \\ &= 3 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 \end{aligned}$$

である。① より

$$z^7 - 1 = 0$$

$$(z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

$z \neq 1$ であるから

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad \dots\dots \text{②}$$

である。② より

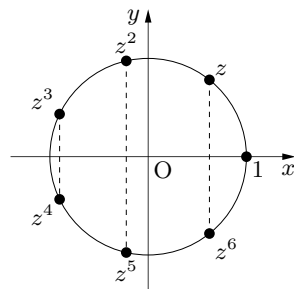
$$(z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6) = 3 + (-1) = 2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

である。

- (3) $z + z^2 + z^3$ の実部は

$$\begin{aligned} & (z + z^2 + z^3 \text{ の実部}) \\ &= \frac{(z + z^2 + z^3) + \overline{(z + z^2 + z^3)}}{2} \\ &= \frac{(z + z^2 + z^3) + (\bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^3)}{2} \\ &= \frac{(z + z^2 + z^3) + (z^6 + z^5 + z^4)}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \quad (\because \text{②}) \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

である。



- $\alpha = z + z^2 + z^4$, $\beta = z^3 + z^5 + z^6$ とおくと, ② と (2) の結果より

$$\alpha + \beta = -1 \text{ かつ } \alpha\beta = 2$$

であり, α, β は $t^2 + t + 2 = 0$ の解であり

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

である. (z^4 の実部) = (z^3 の実部) であるから

$$(z + z^2 + z^3 \text{ の実部}) = (z + z^2 + z^4 \text{ の実部}) = (\alpha \text{ の実部}) = -\frac{1}{2}$$

である.