複素数平面上で $|z-3-3i| \leqq |z|$ を満たす点 z が存在する領域を D_1 する．また，z が D_1 を動くとき，$w=2+i+\dfrac{6}{z}$ で表される点 w が存在する領域を D_2 とし，D_1 と D_2 の共通部分を D とする．次の問いに答えよ．

(1) $z_1=\dfrac{\sqrt{6}}{4}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$ と定めるとき，z_1 を極形式で表せ．ただし，偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(2) 複素数平面上に D_1 を図示せよ．

(3) 複素数平面上に D_2 を図示せよ．

(4) 点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が D を動くとき，$\tan(\arg\alpha)$ のとりうる値の範囲を求めよ．ただし，$\arg\alpha$ は α の偏角を表す．

(5) n を自然数とする．(1) の z_1 に対し，点 $(z_1)^n$ が D に含まれるような最小の n の値を求めよ．

(25 宇都宮大 データ経営 (理)・地域デ・工・農 2)

【答】

(1) $z_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$

(2) 略

(3) 略

(4) $-\dfrac{1}{4} \leqq \tan(\arg\alpha) \leqq \dfrac{\sqrt{14}}{7}$

(5) 6

【解答】

$$D_1=\{z\,|\,|z-3-3i| \leqq |z|\}$$

$$D_2=\left\{w\middle|w=2+i+\frac{6}{z}\right\}$$

$$D=D_1\cap D_2$$

(1) $z_1=\dfrac{\sqrt{6}}{4}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$ を極形式で表すと

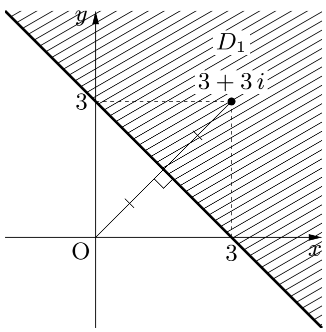
$$z_1=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)} \quad \cdots\cdots(答)$$

となる．

(2) $$|z-3-3i| \leqq |z| \quad \cdots\cdots ①$$

$|z-3-3i|=|z|$ は原点 O と点 $3+3i$ を結ぶ線分の垂直二等分線であり，D_1 はこの直線を境界とする半平面のうちの原点を含まない側の領域 (右図の斜線部分) である．境界も含む．



(3) $$w=2+i+\frac{6}{z} \quad \cdots\cdots ②$$

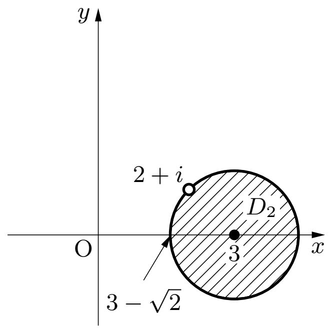
② を z について解くと

$$\frac{6}{z}=w-2-i \iff \frac{z}{6}=\frac{1}{w-2-i}$$

$$\therefore \quad z=\frac{6}{w-2-i}$$

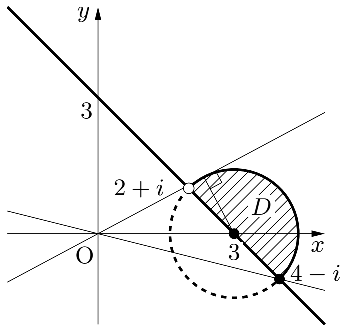
である．z は ① を満たすから

$$\left|\frac{6}{w-2-i}-3-3i\right| \leqq \left|\frac{6}{w-2-i}\right|$$
$$\left|\frac{2-(1+i)(w-2-i)}{w-2-i}\right| \leqq \left|\frac{2}{w-2-i}\right|$$
$$\therefore\quad \begin{cases}|(1+i)(w-2-i)-2| \leqq 2\\ w-2-i \neq 0\end{cases}$$
$$\begin{cases}\left|w-4-i-\dfrac{2}{1+i}\right| \leqq \dfrac{2}{|1+i|}\\ w \neq 2+i\end{cases}$$
$$\therefore\quad \begin{cases}|w-3| \leqq \sqrt{2}\\ w \neq 2+i\end{cases}$$



となる．w が存在する領域 D_2 は点 3 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の周および内部である．ただし，点 $2+i$ は除き，右図の斜線部分となる．

(4) $D = D_1 \cap D_2$ を図示すると右図の斜線部分となる．境界も含むが点 $2+i$ は除く．



点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が D を動くときの $\tan(\arg\alpha)$ のとりうる値の範囲を求める．$\tan(\arg\alpha)$ は原点 O を通る直線と半円 D が共有点をもつときの直線の傾きである．

$\arg\alpha$ が最小となるのは，$\alpha = 4-i$ のときであり，このとき

$$\tan(\arg\alpha) = -\frac{1}{4}$$

である．

また，$\arg\alpha$ が最大となるのは，原点 O を通る直線が半円 D と接するときである．このとき

$$\sin(\arg\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \therefore\quad \cos(\arg\alpha) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$
$$\therefore\quad \tan(\arg\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

である．よって

$$\boldsymbol{-\frac{1}{4} \leqq \tan(\arg\alpha) \leqq \frac{\sqrt{14}}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) (4) より $(z_1)^n \in D$ であるためには，偏角を $-\pi \leqq \theta < \pi$ とすると

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} < \arg(z_1)^n < \dfrac{\pi}{2} & \cdots\cdots\ (*)\\ -\dfrac{1}{4} \leqq \tan\{\arg(z_1)^n\} \leqq \dfrac{\sqrt{14}}{7} & \cdots\cdots\ (**)\end{cases}$$

であることが必要である．

$$(z_1)^n = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^n\left(\cos\frac{5n\pi}{3} + i\sin\frac{5n\pi}{3}\right)$$

であるから

$$\tan\{\arg(z_1)^n\} = \tan\frac{5n\pi}{3}$$

である．

$n=1$ のとき　$\arg z_1 = \arg \dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}$　$\therefore$　$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$　$(**)$ に反する．

$n=2$ のとき　$\arg(z_1)^2 = \arg \dfrac{10\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$　$(*)$ に反する．

$n=3$ のとき　$\arg(z_1)^3 = \arg \dfrac{15\pi}{3} = -\pi$　$(*)$ に反する．

$n=4$ のとき　$\arg(z_1)^4 = \arg \dfrac{20\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$　$(*)$ に反する．

$n=5$ のとき　$\arg(z_1)^5 = \arg \dfrac{25\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$　$\therefore$　$\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$　$(**)$ に反する．

$n=6$ のとき　$\arg(z_1)^6 = \arg \dfrac{30\pi}{3} = 0$　$\therefore$　$\tan 0 = 0$　$(*)$, $(**)$ を満たす．

ここで

$$(z_1)^6 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^6 (\cos 0 + i\sin 0) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^6 = \frac{27}{8} = 3.375$$

$(z_1)^6$ は実軸上の点であり，$3 < (z_1)^6 < 3+\sqrt{2}$ を満たすから，$(z_1)^6 \in D$ である．

よって，$(z_1)^n \in D$ となる最小の n の値は **6** である．　……(答)