

複素数平面上において、点 z が原点を中心とする半径 2 の円周上を動くとき、
 $w = \frac{1}{1-z}$ で表される点 w は、どのような図形を描くか答えよ。

(25 茨城大 工 4(2))

【答】 点 $-\frac{1}{3}$ を中心とする半径 $\frac{2}{3}$ の円

【解答】

点 z は円 $|z| = 2$ 上を動く。

$$w = \frac{1}{1-z} \iff w(1-z) = 1 \iff z = 1 - \frac{1}{w}$$

であるから、 w は

$$\left| 1 - \frac{1}{w} \right| = 2$$

を満たす。

$$|w - 1| = 2|w|$$

$$|w - 1|^2 = 4|w|^2$$

$$(w - 1)(\bar{w} - 1) = 4w\bar{w}$$

$$w\bar{w} - w - \bar{w} + 1 = 4w\bar{w}$$

$$3w\bar{w} + w + \bar{w} - 1 = 0$$

$$w\bar{w} + \frac{1}{3}w + \frac{1}{3}\bar{w} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\left(w + \frac{1}{3}\right)\bar{w} + \frac{1}{3}\left(w + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$\left(w + \frac{1}{3}\right)\left(\bar{w} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$$\left|w + \frac{1}{3}\right|^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\therefore \left|w + \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

点 w が描く図形は

点 $-\frac{1}{3}$ を中心とする半径 $\frac{2}{3}$ の円

……(答)

である。