

複素数平面上において、点  $z$  が原点を中心とする半径 2 の円周上を動くとき、  
 $w = \frac{1}{1-z}$  で表される点  $w$  は、どのような図形を描くか答えよ。

(25 茨城大 工 4(2))

【答】 点  $-\frac{1}{3}$  を中心とする半径  $\frac{2}{3}$  の円

【解答】

点  $z$  は円  $|z| = 2$  上を動く。

$$w = \frac{1}{1-z} \iff w(1-z) = 1 \iff z = 1 - \frac{1}{w}$$

であるから、 $w$  は

$$\left| 1 - \frac{1}{w} \right| = 2$$

を満たす。

$$\begin{aligned} |w-1| &= 2|w| \\ |w-1|^2 &= 4|w|^2 \\ (w-1)(\bar{w}-1) &= 4w\bar{w} \\ w\bar{w} - w - \bar{w} + 1 &= 4w\bar{w} \\ 3w\bar{w} + w + \bar{w} - 1 &= 0 \\ w\bar{w} + \frac{1}{3}w + \frac{1}{3}\bar{w} - \frac{1}{3} &= 0 \\ \left(w + \frac{1}{3}\right)\bar{w} + \frac{1}{3}\left(w + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \\ \left(w + \frac{1}{3}\right)\left(\bar{w} + \frac{1}{3}\right) &= \frac{4}{9} \\ \left|w + \frac{1}{3}\right|^2 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \therefore \left|w + \frac{1}{3}\right| &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

点  $w$  が描く図形は

点  $-\frac{1}{3}$  を中心とする半径  $\frac{2}{3}$  の円 .....(答)

である。