i を虚数単位とし，z を複素数とする．また，$w = 1 + iz$ とする．複素数平面において，4 点 O(0)，A(z)，B(w)，C(1) を考える．以下の各問に答えよ．

(1) OA = BC であることを示せ．また，$z \neq 0$ のとき，直線 OA と直線 BC は垂直に交わることを示せ．

(2) OA = AB を満たす点 z の全体は，どのような図形を表すか．

(3) 点が (2) の図形上を動くとき，$|z + w|$ の最大値と最小値を求めよ．ただし，最大値と最小値を与える z の値を求める必要はない．

(25 茨城大 理 3)

【答】

(1) 略

(2) 点 $1 + i$ と中心とする半径 1 の円

(3) 最大値 $\sqrt{5} + \sqrt{2}$，最小値 $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

【解答】

(1) $w = 1 + iz$，O(0)，A(z)，B(w)，C(1) であるから

$$\mathrm{BC} = |1 - w| = |1 - (1 + iz)| = |-iz| = |z| = \mathrm{OA} \qquad \cdots\cdots(証明終わり)$$

である．また，$z \neq 0$ のとき

$$\frac{1-w}{z} = \frac{-iz}{z} = -i \qquad \therefore \quad \arg\frac{1-w}{z} = -90^\circ$$

であり，直線 OA と直線 BC は垂直に交わる． ……(証明終わり)

(2) OA = AB …… ① を変形する．

$$\mathrm{AB} = |w - z| = |(1 + iz) - z| = |(i - 1)z + 1| = |i - 1|\left|z + \frac{1}{i-1}\right|$$
$$= \sqrt{2}\left|z - \frac{1+i}{2}\right|$$

であるから

$$① \iff |z|^2 = 2\left|z - \frac{1+i}{2}\right|^2$$
$$\therefore \quad |z|^2 = 2\left(z - \frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(z - \frac{1+i}{2}\right)}$$
$$|z|^2 = 2\left(z - \frac{1+i}{2}\right)\left(\overline{z} - \frac{1-i}{2}\right)$$
$$|z|^2 = 2|z|^2 - (1+i)\overline{z} - (1-i)z + 1$$
$$|z|^2 - (1+i)\overline{z} - (1-i)z + 1 = 0$$
$$(z - 1 - i)\overline{z} - (1-i)(z - 1 - i) - 2 + 1 = 0$$
$$(z - 1 - i)\overline{(z - 1 - i)} = 1$$
$$|z - 1 - i|^2 = 1$$
$$\therefore \quad |z - 1 - i| = 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．よって，点 z の全体は

点 $1 + i$ と中心とする半径 1 の円 ……(答)

である．

(3) $v = z + w$ とおくと

$$v = z + (1 + iz) = (1 + i)z + 1 \qquad \therefore \quad z = \frac{v-1}{1+i}$$

である．z は ② を満たすから

$$\left|\frac{v-1}{1+i}-1-i\right|=1$$
$$\left|v-1-(1+i)^2\right|=|1+i|$$
$$\therefore\quad \left|v-1-2i\right|=\sqrt{2}$$

点 v の全体は点 $\mathrm{D}(1+2i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円であり，原点 $\mathrm{O}(0)$ はこの円の外部にある．

よって，$|z+w|$ について

最大値は　$\mathrm{OD}+(\text{半径})=\boldsymbol{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$　……(答)

最大値は　$\mathrm{OD}-(\text{半径})=\boldsymbol{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$　……(答)

である．