$i$ を虚数単位とする．複素数 $z$ についての方程式

$$z^2 - 4iz = 4\sqrt{3}i \qquad \cdots\cdots (*)$$

の 2 つの解を $\alpha$, $\beta$ ($|\alpha| < |\beta|$) とし，$\alpha$, $\beta$ が表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B とする．

(1) 方程式 $(*)$ は

$$\left(z - \boxed{13}\,i\right)^2 = \boxed{14}\left(\cos\frac{\boxed{15}}{\boxed{16}}\pi + i\sin\frac{\boxed{15}}{\boxed{16}}\pi\right) \quad \left(0 \leqq \frac{\boxed{15}}{\boxed{16}}\pi < 2\pi\right)$$

と表せるので，

$$\alpha = -\sqrt{\boxed{17}} + \left(\boxed{18} - \sqrt{\boxed{19}}\right)i$$

である．

(2) 線分 AB の長さは $\boxed{20}\sqrt{\boxed{21}}$ である．また，線分 AB を対角線とする正方形の残りの 2 頂点を表す複素数は

$$-\sqrt{\boxed{22}} + \left(\boxed{23} + \sqrt{\boxed{24}}\right)i \quad と \quad \sqrt{\boxed{22}} + \left(\boxed{23} - \sqrt{\boxed{24}}\right)i$$

である．

(25 青山学院大 理工 A 2)

【答】

| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 2 | 3 | 2 | 2 | 6 | 4 | 2 | 6 | 2 | 2 |

【解答】

$$z^2 - 4iz = 4\sqrt{3}i \qquad \cdots\cdots(*)$$

(1) 方程式 $(*)$ を変形すると

$$(z - 2i)^2 = -4 + 4\sqrt{3}i$$
$$= 8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$\therefore \quad (z - \mathbf{2}i)^2 = \mathbf{8}\left(\cos\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．$z - 2i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$$(z - 2i)^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

であるから，① の右辺と比較すると

$$\begin{cases} r^2 = 8 \\ 2\theta = \dfrac{2}{3}\pi + 2n\pi \ (n \text{ は整数}) \end{cases}$$

であり，$r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意すると

$$r = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3} + \pi$$

であり

$$z = 2i + 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ 2i + 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= \sqrt{2} + (2 + \sqrt{6})i,\ \ -\sqrt{2} + (2 - \sqrt{6})i$$

である．$(*)$ の 2 解 $\alpha$, $\beta$ は $|\alpha| < |\beta|$ を満たすから

$$\alpha = -\sqrt{\mathbf{2}} + (\mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{6}})i \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

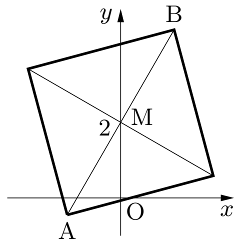
(2) 線分 AB の長さ $|\beta-\alpha|$ は

$$\begin{aligned} |\beta-\alpha| &= \left|(\sqrt{2}+(2+\sqrt{6})i)-(-\sqrt{2}+(2-\sqrt{6})i)\right| \\ &= |2\sqrt{2}+2\sqrt{6}i| \\ &= 2\sqrt{2+6} \\ &= \boldsymbol{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

……(答)

である．

線分 AB の中点 M を表す複素数は $2i$ であり，線分 AB を対角線とする正方形の残りの 2 頂点は，点 M を中心として点 B を $\pm\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点である．それらを表す複素数を $\gamma$ とおくと




$$\begin{aligned} \gamma-2i &= \left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)(\beta-2i) \\ \gamma-2i &= \pm i(\beta-2i) \\ \gamma &= 2i\pm i(\sqrt{2}+\sqrt{6}i) \end{aligned}$$

よって，2 頂点を表す複素数は

$$\boldsymbol{-\sqrt{6}+(2+\sqrt{2})i} \quad \text{と} \quad \boldsymbol{\sqrt{6}+(2-\sqrt{2})i}$$

……(答)

である．