i を虚数単位とする．複素数 α, β および実数 k が次の関係式を満たすとする．

$$0 < \arg\alpha < \pi$$
$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3}$$
$$\beta = k + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) α の値を求めよ．

(2) $\alpha^{20} + \dfrac{1}{\alpha^{20}}$ の値を求めよ．

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha^4}$ の値が実数となるとき，β の値を求めよ．

(4) n を正の整数とする．複素数平面において，原点を O，複素数 α^n を表す点を A，複素数 β^n を表す点を B とする．(3) の仮定のもとで，点 A が線分 OB 上に存在するような最小の n の値を求めよ．またそのとき，線分 AB の長さを求めよ．

(25 高知大 理工・医 4)

【答】

(1) $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

(2) $\alpha^{20} + \dfrac{1}{\alpha^{20}} = -1$

(3) $\beta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

(4) $n = 4$，$\mathrm{AB} = 3$

【解答】

$$0 < \arg\alpha < \pi \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ②$$
$$\beta = k + \frac{\sqrt{6}}{2}i \qquad \cdots\cdots ③$$

(1) ② を変形すると

$$② \iff \alpha^2 - \sqrt{3}\alpha + 1 = 0$$
$$\therefore \quad \alpha = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$$

① より，α の虚部は正であるから

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\sqrt{3}+i}{2}} \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

(2) (1) の結果を極形式で表すと

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \qquad \cdots\cdots ④$$

となるから

$$\begin{aligned}\alpha^{20} + \frac{1}{\alpha^{20}} &= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{20} + \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{20} \\ &= 2\cos\frac{20\pi}{6} = 2\cos\frac{10\pi}{3} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{-1} \qquad \cdots\cdots (答)\end{aligned}$$

である．

(3) ③，④ より

$$\frac{\beta}{\alpha^4} = \frac{k+\frac{\sqrt{6}}{2}i}{\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}} = \left(k+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \left(k+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= \left(-\frac{k}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{3}k}{2}\right)i$$

であるから，$\dfrac{\beta}{\alpha^4}$ が実数であるための条件は

$$-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{3}k}{2}=0$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+2k)=0$$
$$\therefore\quad k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって，β の値は

$$\boldsymbol{\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) (3) のとき

$$\frac{\beta}{\alpha^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}+0i=\sqrt{2} \qquad \therefore\quad \beta=\sqrt{2}\alpha^4$$

であるから，点 A(α^n) が O(0)，B(β^n) を結ぶ線分 OB 上に存在する条件は

$\alpha^n = t\beta^n$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を満たす実数 t が存在する

ことである．

$$\alpha^n = t(\sqrt{2}\alpha^4)^n$$

を整理すると

$$t = \frac{\alpha^n}{(\sqrt{2})^n\alpha^{4n}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-3n} \qquad (\because ④)$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\left(\cos\frac{-n\pi}{2}+i\sin\frac{-n\pi}{2}\right)$$

となる．t が $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数となる条件は

$$\begin{cases}\cos\dfrac{-n\pi}{2} \geqq 0\\ \sin\dfrac{-n\pi}{2}=0\end{cases} \iff n \text{ は } 4 \text{ の倍数}$$

である．n は正の整数であるから，最小の n の値は

$$n=4$$

である．このとき，$t=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^4}(1+0i)=\dfrac{1}{4}$ であり，t は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たし

$$\alpha^4=\frac{1}{4}(\sqrt{2}\alpha^4)^4=\alpha^{16}, \quad \beta^4=(\sqrt{2}\alpha^4)^4=4\alpha^{16}$$

である．

よって，線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=|\beta^4-\alpha^4|=|4\alpha^{16}-\alpha^{16}|=3|\alpha|^{16}=\mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．