第 15 項が 936，第 83 項が 528 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．このとき，$S_n < 0$ となる最小の n を求めよ．

(25 茨城大 教育・地域未来共創 1(1))

【答】 342

【解答】

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とおくと，与えられた条件より

$$\begin{cases} a_{15} : a + 14d = 936 \\ a_{83} : a + 82d = 528 \end{cases}$$

$$\therefore \quad d = \frac{528 - 936}{68} = -\frac{408}{68} = -6,$$

$$a = 936 - 14 \cdot (-6) = 1020$$

である．したがって，一般項 a_n は

$$a_n = 1020 - 6(n-1) = 1026 - 6n$$

であり，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{n\{1020 + (1026 - 6n)\}}{2} = n(1023 - 3n)$$

である．$S_n < 0$ となる $n\ (> 0)$ は

$$n > \frac{1023}{3} = 341$$

であるから，これを満たす最小の n は

342 ……(答)

である．

- $a_n = 1026 - 6n$ であるから，減少数列 $\{a_n\}$ が $a_n = 0$ となるのは

  $$n = \frac{1026}{6} = 171$$

  のときであり，$S_{170 \cdot 2+1} = S_{341} = 0$ となる．

  よって，$S_n < 0$ となる最小の n は

  342

  である．