数列 $\{a_n\}$ を次の①〜③を満たす等比数列とする．

① すべての自然数 n について $a_n > 0$
② $a_1 = 512$
③ $a_1 + a_2 + a_3 = 896$

また，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_2 a_n$ で定め，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．
(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．
(3) S_n が最大となるときの n の値を求めよ．
(4) $|S_n|$ が最小となるときの n の値を求めよ．

(25 鳥取大 医 (生・保)・工・農 (獣) 2)

【答】

(1) $a_n = 2^{10-n}$
(2) $b_n = -n + 10$
(3) $n = 9,\ 10$
(4) $n = 19$

【解答】

(1) 等比数列 $\{a_n\}$ は ①, ② を満たすから，公比を r とおくと，一般項 a_n は

$$a_n = 512r^{n-1} \quad (r > 0)$$

である．さらに ③ より

$$512(1 + r + r^2) = 896$$
$$2^9(1 + r + r^2) = 2^7 \cdot 7$$
$$4(1 + r + r^2) = 7$$
$$4r^2 + 4r - 3 = 0$$
$$(2r + 3)(2r - 1) = 0$$

$r > 0$ より $\quad r = \dfrac{1}{2}$ であり

$$a_n = 2^9 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{2^{10-n}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) より

$$b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{10-n} = \boldsymbol{-n + 10} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = 9\ (> 0)$ で公差が -1 の単調減少な等差数列であるから，$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ が最大となるのは $b_n \geqq 0$ の項をすべてを加えたときである．

$$-n + 10 \geqq 0 \qquad \therefore \quad n \leqq 10$$

$b_{10} = 0$ であることに注意すると，S_n が最大となるときの n の値は

$$\boldsymbol{n = 9,\ 10}$$ ……(答)

である．

(4) $|S_n|$ が最小となるのは，S_n が 0 または 0 に最も近いときである．

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (-k + 10) \\ &= \frac{1}{2} n\{9 + (-n + 10)\} \\ &= -\frac{1}{2} n(n - 19) \end{aligned}$$

であり，$S_n = 0$ となる自然数 n の値は $n = 19$ である．

よって，$|S_n|$ が最小となるときの n の値は $\boldsymbol{n = 19}$ である． ……(答)