数列 $\{a_n\}$ を次の①〜③を満たす等比数列とする．

① すべての自然数 n について $a_n > 0$

② $a_1 = 2560$

③ $a_1 + a_2 + a_3 = 4480$

また，$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log_2 a_k$ とおく．以下の問いに答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$ とする．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．

(2) S_n が最大となるときの n の値を求めよ．

(3) $|S_n|$ が最小となるときの n の値を求めよ．

(25 鳥取大 医 1)

【答】

(1) $a_n = 5 \cdot 2^{10-n}$

(2) $n = 12$

(3) $n = 24$

【解答】

(1) 等比数列 $\{a_n\}$ は ①，② を満たすから，公比を r とおくと，一般項 a_n は

$$a_n = 2560r^{n-1} \quad (r > 0)$$

である．さらに ③ より

$$2560(1 + r + r^2) = 4480$$
$$2^9 \cdot 5(1 + r + r^2) = 2^7 \cdot 5 \cdot 7$$
$$4(1 + r + r^2) = 7$$
$$4r^2 + 4r - 3 = 0$$
$$(2r + 3)(2r - 1) = 0$$

$r > 0$ より　$r = \dfrac{1}{2}$ であり

$$a_n = 2^9 \cdot 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{5 \cdot 2^{10-n}}$$ ……(答)

である．

(2)
$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= \log_2(5 \cdot 2^{10-n}) \\ &= \log_2 5 + (10 - n) \\ &= -n + 10 + \log_2 5\end{aligned}$$

数列 $\{\log_2 a_n\}$ は $\log_2 a_1 = \log_2 2560$ (> 0) で公差が -1 の単調減少な等差数列であるから，$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log_2 a_k$ が最大となるのは $\log_2 a_n > 0$ の項をすべてを加えたときである．

$$-n + 10 + \log_2 5 > 0 \qquad \therefore \quad n < 10 + \log_2 5$$

ここで

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{1 - \log_{10} 2}{\log_{10} 2} = \frac{1 - 0.301}{0.301} = \frac{699}{301} = 2.32\cdots$$

であるから

$$n < 10 + 2.32\cdots = 12.32\cdots$$

これを満たす最大な n は　$\boldsymbol{n = 12}$　である． ……(答)

(3) $|S_n|$ が最小となるのは，S_n が 0 または 0 に最も近いときである．

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \log_2 a_k = \sum_{k=1}^{n} (-k + 10 + \log_2 5) \\ &= \frac{1}{2} n\{(9 + \log_2 5) + (-n + 10 + \log_2 5)\} \\ &= -\frac{1}{2} n(n - 19 - 2\log_2 5) \end{aligned}$$

であり，$S_n = 0$ となる n の値は $n = 0,\ 19 + 2\log_2 5$ である．

$$19 + 2\log_2 5 = 19 + 2 \times 2.32\cdots = 23.6\cdots$$

n は自然数であるから，S_1，S_{23}，S_{24} の大小を比較する．

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-18 - 2\log_2 5) = 9 + \log_2 5 = 11.32\cdots \\ S_{23} &= -\frac{1}{2} \cdot 23 \cdot (4 - 2\log_2 5) = -23(2 - \log_2 5) = 23 \times 0.32\cdots = 7.3\cdots \\ S_{24} &= -\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (5 - 2\log_2 5) = -24(2.5 - \log_2 5) = -24 \times 0.17\cdots = -4.\cdots \end{aligned}$$

よって，$|S_n|$ が最小となるときの n の値は　$\boldsymbol{n = 24}$　である．　……（答）