n を 3 以上の整数とする．3 つの整数 $a,\ b,\ c\ (1 \leqq a < b < c \leqq 2n)$ に対して，$p = b - a$ と $q = c - b$ とする．$\langle a,\ b,\ c\rangle$ の値を $p \geqq q$ ならば $\langle a,\ b,\ c\rangle = p$ とし，$p < q$ ならば $\langle a,\ b,\ c\rangle = q$ とする．$(2n-2)$ 以下の自然数 k に対して，$\langle a,\ b,\ c\rangle = k$ となる 3 つの整数 $a,\ b,\ c\ (1 \leqq a < b < c \leqq 2n)$ の選び方の総数を $S(k)$ とする．

(1) $n = 3$ のとき，$S(2),\ S(3)$ を求めよ．

(2) $n \leqq k \leqq 2n-2$ のとき，$S(k)$ を $k,\ n$ を用いて表せ．

(3) $1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，$S(k)$ を $k,\ n$ を用いて表せ．

(4) $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n-2$ に対する $S(k)$ の最大値を M とする．n が 3 の倍数のとき，M を n を用いて表せ．

(25 徳島大 医・歯・薬 4)

【答】

(1) $S(2) = 8,\ S(3) = 6$

(2) $S(k) = (2n-k-1)(2n-k)$

(3) $S(k) = -3k^2 + (4n+1)k - 2n$

(4) $M = \dfrac{4n(n-1)}{3}$

【解答】

$$1 \leqq a < b < c \leqq 2n, \quad p = b - a\ (\geqq 1), \quad q = c - b\ (\geqq 1)$$

$$\langle a,\ b,\ c\rangle = \begin{cases} p & (p \geqq q\ \text{のとき}) \\ q & (p < q\ \text{のとき}) \end{cases}$$

$S(k)$ は $\langle a,\ b,\ c\rangle = k$ となる 3 つの整数 $a,\ b,\ c$ の選び方の総数

(1) $n = 3$ のとき　$1 \leqq a < b < c \leqq 6$

(i) $S(2)$ について

$\langle a,\ b,\ c\rangle = 2$ となるのは

$$(p,\ q) = (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2)$$

のいずれかである．

- $(p,\ q)=(2,\ 1)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

  $(a,\ b,\ c) = (1,\ 3,\ 4),\ (2,\ 4,\ 5),\ (3,\ 5,\ 6)$ の　3 通り

- $(p,\ q)=(1,\ 2)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

  $(a,\ b,\ c) = (1,\ 2,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5),\ (3,\ 4,\ 6)$ の　3 通り

- $(p,\ q)=(2,\ 2)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

  $(a,\ b,\ c) = (1,\ 3,\ 5),\ (2,\ 4,\ 6)$ の　2 通り

であり

$$S(2) = 3 + 3 + 2 = \mathbf{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) $S(3)$ について

$\langle a,\ b,\ c\rangle = 3$ となるのは

$$(p,\ q) = (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)$$

のいずれかである．$(p,\ q) = (3,\ 3)$ は存在しない．なぜなら，$(p,\ q) = (3,\ 3)$ が存在すると仮定すると

$$p + q = (b-a) + (c-b) = c - a \leqq 6 - 1 = 5$$

であるが，これは $p + q = 3 + 3 = 6$ に反する．

- $(p,\ q)=(3,\ 1)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

  $(a,\ b,\ c)=(1,\ 4,\ 5),\ (2,\ 5,\ 6)$ の　2 通り
- $(p,\ q)=(3,\ 2)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

  $(a,\ b,\ c)=(1,\ 4,\ 6)$ の　1 通り
- $(p,\ q)=(1,\ 3)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

  $(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 5),\ (2,\ 3,\ 6)$ の　2 通り
- $(p,\ q)=(2,\ 3)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

  $(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 6)$ の　1 通り

であり

$$S(3)=2+1+2+1=\mathbf{6}$$ ……(答)

である．

(2) $n \leqq k \leqq 2n-2$ のとき

$$p>q,\quad p<q,\quad p=q$$

に分けて $\langle a,\ b,\ c\rangle=k$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方を数える．

- $p>q$ のとき，$\langle a,\ b,\ c\rangle=k$ となるのは

$$(p,\ q)=(k,\ q)\quad (q=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$$

$$\begin{cases} b-a=k \\ c-b=q \quad (q=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1) \end{cases}$$

$$(a,\ b,\ c)=(a,\ a+k,\ a+k+q)\quad (q=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$$

である．$a+k+q \leqq 2n$ より，$a \leqq 2n-k-q$ であるから

$$1 \leqq a \leqq 2n-k-1$$

である．a を固定したとき $(p,\ q)=(k,\ q)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

$$(a,\ b,\ c)=(a,\ a+k,\ a+k+1),\ (a,\ a+k,\ a+k+2),\ \cdots,$$
$$(a,\ a+k,\ 2n) \text{ の}\quad 2n-a-k \text{ 通り}$$

ある．a を動かすと

$$\sum_{a=1}^{2n-k-1}(2n-a-k)=\frac{(2n-k-1)\{(2n-1-k)+1\}}{2}$$
$$=\frac{(2n-k-1)(2n-k)}{2} \text{ 通り}$$

ある．

- $p<q$ のとき，$\langle a,\ b,\ c\rangle=k$ となるのは

$$(p,\ q)=(p,\ k)\quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$$

$$\begin{cases} b-a=p \quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1) \\ c-b=k \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=a+p \quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1) \\ c=a+p+k \end{cases}$$

$$(a,\ b,\ c)=(a,\ a+p,\ a+p+k)\quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$$

である．$a+p+k \leqq 2n$ より $a \leqq 2n-k-p$ であるから

$$1 \leqq a \leqq 2n-k-1$$

である．a を固定したとき $(p,\ q)=(p,\ k)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

$$(a,\ b,\ c)=(a,\ a+1,\ a+1+k),\ (a,\ a+2,\ a+2+k),\ \cdots,$$
$$(a,\ 2n-k,\ 2n) \text{ の}\quad 2n-a-k \text{ 通り}$$

ある．a を動かすと，$p>q$ のときと同じく

$$\sum_{a=1}^{2n-k-1}(2n-a-k)=\frac{(2n-k-1)(2n-k)}{2}\text{ 通り}$$

ある．

- $p=q$ のとき

$$p+q=(b-a)+(c-b)=c-a \leqq 2n-1$$
$$p+q=k+k=2k \geqq 2n$$

で不合理であり，$p=q$ となることはない．

よって

$$\begin{aligned}S(k)&=\frac{(2n-k-1)(2n-k)}{2}+\frac{(2n-k-1)(2n-k)}{2}\\&=\boldsymbol{(2n-k-1)(2n-k)}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $1 \leqq k \leqq n-1$ のとき

$$p>q,\quad p<q,\quad p=q$$

に分けて $\langle a,\ b,\ c\rangle=k$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方を数える．

- $p>q$ のとき，$\langle a,\ b,\ c\rangle=k$ となるのは

$$(p,\ q)=(k,\ q)\quad(q=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$$

$$\begin{cases}b-a=k\\ c-b=q\quad(q=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)\end{cases}$$

$$(a,\ b,\ c)=(a,\ a+k,\ a+k+q)\quad(q=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$$

である．$a+k+q \leqq 2n$ より $a \leqq 2n-k-q$ であるから

$$1 \leqq a \leqq 2n-k-q$$

である．q を固定したとき $(p,\ q)=(k,\ q)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1+k,\ 1+k+q),\ (2,\ 2+k,\ 2+k+q),\ \cdots,\ (2n-k-q,\ 2n-q,\ 2n)\text{ の }\ 2n-k-q\text{ 通り}$$

ある．q を動かすと

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{k-1}(2n-k-q)&=\frac{(k-1)\{(2n-k-1)+(2n-2k+1)\}}{2}\\&=\frac{(k-1)(4n-3k)}{2}\text{ 通り}\end{aligned}$$

ある．

- $p<q$ のとき，$\langle a,\ b,\ c\rangle=k$ となるのは

$$(p,\ q)=(p,\ k)\quad(p=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$$

$$\begin{cases}b-a=p\quad(p=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)\\ c-b=k\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=a+p\quad(p=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)\\ c=a+p+k\end{cases}$$

$$(a,\ b,\ c)=(a,\ a+p,\ a+p+k)\quad(p=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$$

である．$a+p+k \leqq 2n$ より $a \leqq 2n-k-p$ であるから

$$1 \leqq a \leqq 2n-k-p$$

である．p を固定したとき $(p,\ q)$=$(p,\ k)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

$$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1+p,\ 1+p+k),\ (2,\ 2+p,\ 2+p+k),\ \cdots,$$
$$(2n-k-p,\ 2n-k,\ 2n) \text{ の } \quad 2n-k-p \text{ 通り}$$

ある．p を $p=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ で動かすと，$p>q$ のときと同じく

$$\sum_{p=1}^{k-1}(2n-k-q) = \frac{(k-1)(4n-3k)}{2} \text{ 通り}$$

ある．

- $p=q$ のとき，$\langle a,\ b,\ c\rangle = k$ となるのは

$$(p,\ q) = (k,\ k) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$\begin{cases} b-a=k \\ c-b=k \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=a+k \\ c=a+2k \end{cases}$$

$$(a,\ b,\ c) = (a,\ a+k,\ a+2k)$$

である．$a+2k \leqq 2n$ より $a \leqq 2n-2k$ であるから

$$1 \leqq a \leqq 2n-2k$$

である．$(a,\ a+k,\ a+2k)$ となる $a,\ b,\ c$ の選び方は

$$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1+k,\ 1+2k),\ (2,\ 2+k,\ 2+2k),\ \cdots,$$
$$(2n-2k,\ 2n-k,\ 2n) \text{ の } \quad 2n-2k \text{ 通り}$$

ある．

よって，$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{(k-1)(4n-3k)}{2} + \frac{(k-1)(4n-3k)}{2} + (2n-2k) \\ &= \{-3k^2+(4n+3)k-4n\} + (2n-2k) \\ &= \boldsymbol{-3k^2+(4n+1)k-2n} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(4) (2)，(3) より

$$S(k) = \begin{cases} -3k^2+(4n+1)k-2n & (1 \leqq k \leqq n-1) \\ k^2-(4n-1)k+4n^2-2n & (n \leqq k \leqq 2n-2) \end{cases}$$

(i) $1 \leqq k \leqq n-1$ のとき

$$S(k) = -3\left(k-\frac{4n+1}{6}\right)^2 + 3\left(\frac{4n+1}{6}\right)^2 - 2n$$

n は 3 の倍数であるから，$n=3l$ (l は整数) とおくと $\dfrac{4\cdot 3l+1}{6} = 2l+\dfrac{1}{6}$ であり，$\dfrac{4\cdot 3l+1}{6}$ に最も近い整数 k は $2l = 2\cdot\dfrac{n}{3}$ である．

よって，$1 \leqq k \leqq n-1$ の範囲では $S(k)$ は $k=\dfrac{2}{3}n$ で

$$\begin{aligned} \text{最大値 } S\left(\frac{2}{3}n\right) &= -3\cdot\left(\frac{2}{3}n-\frac{4n+1}{6}\right)^2 + 3\left(\frac{4n+1}{6}\right)^2 - 2n \\ &= -\frac{1}{12} + \frac{16n^2+8n+1}{12} - 2n \\ &= \frac{4n^2+2n}{3} - 2n \\ &= \frac{4n(n-1)}{3} \end{aligned}$$

をとる．

(ii) $n \leqq k \leqq 2n-2$ のとき

$$\begin{aligned} S(k) &= k^2-(4n-1)k+4n^2-2n \\ &= \left(k-\frac{4n-1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\dfrac{4n-1}{2}=2n-\dfrac{1}{2}>2n-2$ であり，$n \leqq k \leqq 2n-2$ の範囲では $S(k)$ は単調減少であるから，$S(k)$ は $k=n$ で

$$\begin{aligned} \text{最大値 } S(n) &= \left(n-\frac{4n-1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{-2n+1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \\ &= \frac{(4n^2-4n+1)-1}{4} \\ &= n(n-1) \end{aligned}$$

をとる.

(i)，(ii) それぞれの最大値 $S\left(\dfrac{2}{3}n\right)$，$S(n)$ の大小を比較すると

$$S\left(\frac{2}{3}n\right)=\frac{4}{3}n(n-1)=\frac{4}{3}S(n)>S(n)$$

である.

よって，$S(k)$ $(1 \leqq k \leqq 2n-2)$ の最大値 M は

$$M=S\left(\frac{2}{3}n\right)=\boldsymbol{\frac{4n(n-1)}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.