$y \geqq 5,\ y \leqq -x^2+4x+n^2+1$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数 S を求める．

(i) $n=5$ のとき，$S=\boxed{23}\boxed{24}\boxed{25}$ である．

(ii) n を正の整数とするとき，$S=\dfrac{\boxed{26}n^3+\boxed{27}n+\boxed{28}}{\boxed{29}}$ である．

(25 青山学院大 経済 2(1))

【答】

232425	26	27	28	29
176	4	5	3	3

【解答】

$$\begin{cases} y \geqq 5 \\ y \leqq -x^2+4x+n^2+1 \end{cases}$$

を満たす領域を D_n とおく．

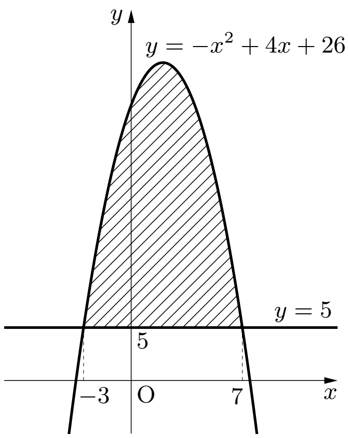
(i) $n=5$ のとき

$$D_5 \begin{cases} y \geqq 5 \\ y \leqq -x^2+4x+26 \end{cases}$$

である．曲線 $y=-x^2+4x+26$ と直線 $y=5$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x^2+4x+26&=5 \\ -x^2+4x+21&=0 \\ -(x+3)(x-7)&=0 \\ \therefore\quad x&=-3,\ 7 \end{aligned}$$

であり，領域 D_5 は右図の斜線部分となる．境界含む．



S は D_5 の格子点 $(x,\ y)$ の個数であるから

$$\begin{aligned} D&=\sum_{x=-3}^{7}\{(-x^2+4x+26)-4\} \\ &=\sum_{x=0}^{10}\{-(x-3)^2+4(x-3)+22\} \\ &=\sum_{x=0}^{10}(-x^2+10x+1) \\ &=-\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+10\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+1\cdot 11 \\ &=-385+550+11 \\ &=\mathbf{176} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(ii) 曲線 $y=-x^2+4x+n^2+1$ と直線 $y=5$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x^2+4x+n^2+1&=5 \\ -x^2+4x+n^2-4&=0 \\ -(x+n-2)(x-n-2)&=0 \\ \therefore\quad x&=-n+2,\ n+2 \end{aligned}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{x=-n+2}^{n+2} \{(-x^2+4x+n^2+1)-4\} \\
&= \sum_{x=0}^{2n} \{-(x-n+2)^2+4(x-n+2)+n^2-3\} \\
&= \sum_{x=0}^{2n} (-x^2+2nx+1) \\
&= -\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} + 2n \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} + (2n+1) \\
&= -\frac{n(8n^2+6n+1)}{3} + 2n^2(2n+1) + (2n+1) \\
&= -\frac{8n^3+6n^2+n)}{3} + \frac{3(4n^3+2n^2+2n+1)}{3} \\
&= \boldsymbol{\frac{4n^3+5n+3}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である.