数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{2}{16},\ \frac{4}{16},\ \frac{8}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{2}{32},\ \frac{4}{32},\ \frac{8}{32},\ \frac{16}{32},\ \frac{1}{64},\ \cdots$$

の規則性を推測し，次の問いに答えよ．

(1) 数列の各項を既約分数で表す．このとき，最初に現れる $\dfrac{1}{128}$ は第何項か．また，2 回目に現れる $\dfrac{1}{512}$ は第何項か．

(2) 第 300 項を求めよ．ただし，既約分数で表せ．

(3) k を自然数とする．$n = 2k^2 + k + 1$ のとき，初項から第 n 項までの和を k を用いて表せ．

(25 徳島大 理工・医 (保) 3)

【答】

(1) $\dfrac{1}{128}$ は第 22 項，$\dfrac{1}{512}$ は第 47 項

(2) $\dfrac{1}{2}$

(3) $2k - 1 + \dfrac{3}{2^{2k+1}}$

【解答】

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{2}{16},\ \frac{4}{16},\ \frac{8}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{2}{32},\ \frac{4}{32},\ \frac{8}{32},\ \frac{16}{32},\ \frac{1}{64},\ \cdots$$

$$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{2^2},\ \frac{2}{2^2}\ \Big|\ \frac{1}{2^3},\ \frac{2}{2^3},\ \frac{2^2}{2^3}\ \Big|\ \frac{1}{2^4},\ \frac{2}{2^4},\ \frac{2^2}{2^4},\ \frac{2^3}{2^4}\ \Big|\ \frac{1}{2^5},\ \frac{2}{2^5},\ \frac{2^2}{2^5},\ \frac{2^3}{2^5},\ \frac{2^4}{2^5}\ \Big|\ \frac{1}{2^6},\ \cdots$$

(1) 与えられた数列において，分母が 2^l である項を第 l 群とすると，第 l 群は

$$\frac{1}{2^l},\ \frac{2}{2^l},\ \frac{2^2}{2^l},\ \cdots,\ \frac{2^{l-1}}{2^l}$$

の l 個の項が順に並ぶ．

$128 = 2^7$ であり，最初に現れる $\dfrac{1}{128}$ は第 7 群の 1 番目の項であるから

$$\left(\sum_{l=1}^{6} l\right) + 1 = \frac{6 \cdot 7}{2} + 1 = 22$$

すなわち，**第 22 項**　である． ……(答)

また，$512 = 2^9$ であり，2 回目に現れる $\dfrac{1}{512}$ は $\dfrac{2}{2^{10}}$ であり，第 10 群の 2 番目の項であるから

$$\left(\sum_{l=1}^{9} l\right) + 2 = \frac{9 \cdot 10}{2} + 2 = 47$$

すなわち，**第 47 項**　である． ……(答)

(2) 第 300 項が第 m 群の項であるとすると

$$\sum_{l=1}^{m-1} l < 300 \leqq \sum_{l=1}^{m} l$$

$$\frac{(m-1)m}{2} < 300 \leqq \frac{m(m+1)}{2}$$

$$(m-1)m < 600 \leqq m(m+1)$$

$24 \cdot 25 = 600$ であるから，$m = 24$ であり，第 300 項は第 24 群の末項 $\dfrac{2^{24-1}}{2^{24}}$ である．既約分数で表すと　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　である． ……(答)

(3) (2) と同じく，$n = 2k^2 + k + 1$ のとき，第 n 項が第 m 群の項であるとすると

$$\sum_{l=1}^{m-1} l < 2k^2 + k + 1 \leqq \sum_{l=1}^{m} l$$
$$\frac{(m-1)m}{2} < 2k^2 + k + 1 \leqq \frac{m(m+1)}{2}$$
$$\frac{(m-1)m}{2} < \frac{2k(2k+1)}{2} + 1 \leqq \frac{m(m+1)}{2}$$

が成り立つ．$m = 2k + 1$ であり，第 $2k^2 + k + 1$ 項は第 $2k + 1$ 群の初項である．

第 l 群の項の総和は

$$\sum_{j=0}^{l-1} \frac{2^j}{2^l} = \frac{\dfrac{2^l - 1}{2 - 1}}{2^l} = \frac{2^l - 1}{2^l}$$

であるから，求める和は

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{l=1}^{2k} \frac{2^l - 1}{2^l}\right) + \frac{1}{2^{2k+1}} \\
&= \sum_{l=1}^{2k} \left(1 - \frac{1}{2^l}\right) + \frac{1}{2^{2k+1}} \\
&= 2k - \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}}{1 - \dfrac{1}{2}} + \frac{1}{2^{2k+1}} \\
&= 2k - 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k+1}} \\
&= \boldsymbol{2k - 1 + \frac{3}{2^{2k+1}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．