次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = \frac{3}{5}, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ．

(2) 一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

(3) $n = 1,\ 2,\ 3 \cdots$ とするとき，$1 - \dfrac{2}{3^n} < a_n < 1$ が成り立つことを証明せよ．

(4) $m \leqq a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2025}$ を満たす最大の整数 m を求めよ．

(25 宇都宮大 データ経営 (理)・地域デ・工・農 1)

【答】

(1) $a_2 = \dfrac{9}{11}$, $a_3 = \dfrac{27}{29}$, $a_4 = \dfrac{81}{83}$, $a_5 = \dfrac{243}{245}$

(2) 略

(3) 略

(4) 2024

【解答】

$$a_1 = \frac{3}{5}, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n+1} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① より

$$a_2 = \frac{3 \cdot \frac{3}{5}}{2 \cdot \frac{3}{5} + 1} = \frac{9}{6+5} = \boldsymbol{\frac{9}{11}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$a_3 = \frac{3 \cdot \frac{9}{11}}{2 \cdot \frac{9}{11} + 1} = \frac{27}{18+11} = \boldsymbol{\frac{27}{29}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$a_4 = \frac{3 \cdot \frac{27}{29}}{2 \cdot \frac{27}{29} + 1} = \frac{81}{54+29} = \boldsymbol{\frac{81}{83}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$a_4 = \frac{3 \cdot \frac{81}{83}}{2 \cdot \frac{81}{83} + 1} = \frac{243}{162+83} = \boldsymbol{\frac{243}{245}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)
$$a_n = \frac{3^n}{3^n+2} \cdots\cdots (*)$$

と推測される．

すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$\frac{3^1}{3^1+2} = \frac{3}{5}$$

であり，$n = 1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．① より

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n+1} = \frac{3 \cdot \frac{3^k}{3^k+2}}{2 \cdot \frac{3^k}{3^k+2} + 1} \quad (\because \text{ 帰納法の仮定})$$

$$= \frac{3^{k+1}}{2 \cdot 3^k + (3^k+2)} = \frac{3^{k+1}}{3^{k+1}+2}$$

$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ．　　……(証明終わり)

- 直接，一般項を求めておこう．
　すべての自然数 n について $a_n \neq 0$ であることが数学的帰納法により確認されるから，① の辺々の逆数をとることができる．

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n+1}{3a_n} = \frac{1}{3}\frac{1}{a_n} + \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$$

数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ は初項 $\frac{1}{a_1} - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$\frac{1}{a_n} - 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3^n}$$
$$\therefore\quad \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{2}{3^n} = \frac{3^n+2}{3^n}$$
$$\therefore\quad a_n = \frac{3^n}{3^n+2}$$

である．

(3) 各辺の差を計算すると

$$\begin{aligned} a_n - \left(1 - \frac{2}{3^n}\right) &= \frac{3^n}{3^n+2} - \left(1 - \frac{2}{3^n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3^n+2}\right) - \left(1 - \frac{2}{3^n}\right) \\ &= \frac{-2\cdot 3^n + 2(3^n+2)}{(3^n+2)3^n} \\ &= \frac{4}{(3^n+2)3^n} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$1 - a_n = 1 - \frac{3^n}{3^n+2} = \frac{2}{3^n+2} > 0$$

である．よって，不等式 $1 - \frac{2}{3^n} < a_n < 1$ は成り立つ．　　……(証明終わり)

- $a_n = \frac{3^n}{3^n+2} = 1 - \frac{2}{3^n+2}$ であり，$\frac{2}{3^n+2} < \frac{2}{3^n}$，$\frac{2}{3^n+2} > 0$ であることに注意すると

$$a_n > 1 - \frac{2}{3^n}, \qquad a_n < 1$$

であり，不等式 $1 - \frac{2}{3^n} < a_n < 1$ が成り立つ．

(4) (3) の不等式の各辺の和をとると

$$\sum_{n=1}^{2025}\left(1 - \frac{2}{3^n}\right) < \sum_{n=1}^{2025} a_n < \sum_{n=1}^{2025} 1$$
$$2025 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2025}}{1 - \frac{1}{3}} < \sum_{n=1}^{2025} a_n < 2025$$
$$2024 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2025} < \sum_{n=1}^{2025} a_n < 2025$$

となる．よって，$m \leqq \sum_{n=1}^{2025} a_n$ を満たす最大の整数 m は **2024** である．　　……(答)