n を 2 以上の自然数とする．次の問 (1)〜(4) に答えよ．

(1) $n^3 - n$ は 6 の倍数であることを示せ．

(2) $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ は 24 の倍数であることを示せ．

(3) n に関する数学的帰納法を用いて，$n^5 + 4n$ は 5 の倍数であることを示せ．

(4) $n^9 + 2n^8 - n^7 - 2n^6 + 4n^5 + 8n^4 - 4n^3 - 8n^2$ は 120 の倍数であることを示せ．

(25 立教大 理 (数) 2 月 9 日 4)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) 略

【解答】

(1) $$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$$

連続する 3 整数の積は 2 の倍数かつ 3 の倍数であり，2 と 3 は互いに素であるから，$n^3 - n$ は $2 \times 3 = 6$ の倍数である． …… (証明終わり)

(2) $$\begin{aligned} n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n &= n(n^3 + 2n^2 - n - 2) \\ &= n \cdot (n-1)(n+1)(n+2) \\ &= (n-1)n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

連続する 4 整数の中には，4 の倍数が 1 つ，4 の倍数でない偶数が 1 つ含まれるから，$4 \times 2 = 8$ の倍数である．また，連続する 4 整数の中には，3 の倍数が少なくとも 1 つ (1 つまたは 2 つ) 含まれる．8 と 3 は互いに素であるから，$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ は $8 \times 3 = 24$ の倍数である． …… (証明終わり)

(3) 2 以上の自然数 n について

「$n^5 + 4n$ は 5 の倍数である」 …… $(*)$

ことを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n = 2$ のとき

$$2^5 + 4 \cdot 2 = 32 + 8 = 40 = 5 \cdot 8$$

であり，$n = 2$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned} (k+1)^5 + 4(k+1) &= \sum_{l=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_l k^l + 4k + 4 \quad (\because \text{ 二項定理}) \\ &= \left(1 + \sum_{l=1}^{4} {}_5\mathrm{C}_l k^l + k^5\right) + 4k + 4 \\ &= k^5 + 4k + \sum_{l=1}^{4} {}_5\mathrm{C}_l k^l + 5 \end{aligned}$$

帰納法の仮定により $k^5 + 4k$ は 5 の倍数である．また，$l = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき整数

$${}_5\mathrm{C}_l = \frac{5!}{(5-l)!l!}$$

は分子が 5 の倍数，分母の $(5-l)!,\ l!$ はどちらも 5 より小さい整数の積である．さらに，5 は素数であるから，${}_5\mathrm{C}_l$ は 5 の倍数であり，$\displaystyle\sum_{l=1}^{4} {}_5\mathrm{C}_l k^l$ も 5 の倍数である．したがって，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

よって，(i)，(ii) より，2 以上のすべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ．

…… (証明終わり)

(4)
$$\begin{aligned} & n^9+2n^8-n^7-2n^6+4n^5+8n^4-4n^3-8n^2 \\ &= (n^4+2n^3-n^2-2n)n^5+4n(n^4+2n^3-n^2-2n) \\ &= (n^4+2n^3-n^2-2n)(n^5+4n) \end{aligned}$$

である．(2) より $n^4+2n^3-n^2-2n$ は 24 の倍数であり，(3) より n^5+4n は 5 の倍数である．さらに，24 と 5 は互いに素であるから，$n^9+2n^8-n^7-2n^6+4n^5+8n^4-4n^3-8n^2$ は $24\times 5=120$ の倍数である．

…… (証明終わり)