数列 $\{a_n\}$ の初項のから第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n - 2^n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるとき，以下の空欄をうめよ．

(1) $a_1 = \boxed{\text{イ}}$ である．

(2) a_{n+1} を a_n の式で表すと，$a_{n+1} = \boxed{\text{ロ}}$ である．

(3) $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおく．数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めると，$b_n = \boxed{\text{ハ}}$ である．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ を n の式で表すと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k = \boxed{\text{ニ}}$ である．

(25 会津大 2)

【答】

イ	ロ	ハ	ニ
1	$2a_n + 2^n$	$\dfrac{n}{2}$	$n2^{n+1} - 2^{n+2} + n + 4$

【解答】

$$S_n = 2a_n - 2^n + 1 \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $n = 1$ のとき，$S_1 = a_1$ であることに注意すると，① は

$$a_1 = 2a_1 - 2^1 + 1$$

$$\therefore \quad a_1 = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ① で n を $n+1$ とおくと

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} - 2^{n+1} + 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② の辺々を引く．$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ に注意すると

$$a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) - 2^{n+1} + 2^n$$

$$\therefore \quad a_{n+1} = \boldsymbol{2a_n + 2^n} \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ③ の辺々を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$$

となる．数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから，一般項 b_n は

$$b_n = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{n}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) (3) より

$$a_n = 2^n b_n = n2^{n-1}$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} (2\cdot k2^{k-1} - 2^k + 1) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)2^k + n$$

ここで，$T_n=\sum_{k=1}^{n}(k-1)2^k$ とおくと

$$\begin{aligned} T_n &= 0\cdot 2^1+1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^n \\ 2T_n &= \qquad\quad 0\cdot 2^2+1\cdot 2^3+\cdots+(n-2)\cdot 2^n+(n-1)\cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

辺々の差をとると

$$\begin{aligned} -T_n &= 2^2+2^3+\cdots+2^n-(n-1)2^{n+1} \\ &= 2^2\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}-(n-1)2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}-4-(n-1)2^{n+1} \\ \therefore\quad T_n &= (n-1)\cdot 2^{n+1}-2^{n+1}+4 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}S_k &= (n-1)\cdot 2^{n+1}-2^{n+1}+4+n \\ &= \boldsymbol{n2^{n+1}-2^{n+2}+n+4} \end{aligned}$$ ……(答)

である．