数列 $\{a_n\}$ を次の条件により定める．

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,$$
$$(n+1)a_{n+2} - (2n+3)a_{n+1} + (n+2)a_n = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと，

$$b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{225} \frac{1}{a_n}$ の値を求めよ．

(25 北海道大 文 3)

【答】

(1) 略

(2) $a_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

(3) $\dfrac{225}{113}$

【解答】

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$(n+1)a_{n+2} - (2n+3)a_{n+1} + (n+2)a_n = 0 \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ② を変形すると

$$(n+1)a_{n+2} - \{(n+1+(n+2)\}a_{n+1} + (n+2)a_n = 0$$
$$(n+1)(a_{n+2} - a_{n+1}) = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$$

となる．$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと

$$(n+1)b_{n+1} = (n+2)b_n$$
$$\therefore \quad b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}b_n \quad (n \geqq 1)$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

(2) (1) より

$$\frac{b_{n+1}}{n+2} = \frac{b_n}{n+1}$$

が成り立つ．数列 $\left\{\dfrac{b_n}{n+1}\right\}$ は初項 $\dfrac{b_1}{1+1} = \dfrac{3-1}{2} = 1$ ($\because$ ①) の定数数列であるから

$$\frac{b_n}{n+1} = 1 \qquad \therefore \quad b_n = n+1$$

である．$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列 ($b_n = a_{n+1} - a_n$) であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\ &= 1 + \frac{(n-1)(2+n)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\{2 + (n^2 + n - 2)\} \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.
　よって

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}n(n+1)} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.
(3)　(2) より

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{225} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{225} \frac{2}{n(n+1)} \\
&= 2\sum_{n=1}^{225} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{226} \right) \\
&= 2 \cdot \frac{225}{226} \\
&= \boldsymbol{\frac{225}{113}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である.