数列 $\{a_n\}$ を，

$$a_1 = 10,\quad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{9}{{a_n}^2}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して $a_n > 3$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} < a_n$ が成り立つことを示せ．

(3) 2 以上のすべての自然数 n に対して

$$a_n - 3 < 7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

が成り立つことを示せ．

(25 千葉大 4)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

【解答】

$$a_1 = 10 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{9}{{a_n}^2}\quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) すべての自然数 n に対して $a_n > 3$ が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき

① より，$a_1 > 3$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 3 &= \left(\frac{2}{3}a_k + \frac{9}{{a_k}^2}\right) - 3 \\ &= \frac{2{a_k}^3 + 27 - 9{a_k}^2}{3{a_k}^2} \\ &= \frac{(a_k - 3)(2{a_k}^2 - 3a_k - 9)}{3{a_k}^2} \qquad \cdots\cdots ③ \\ &= \frac{(a_k - 3)^2(2a_k + 3)}{3{a_k}^2} \\ &> 0 \quad (\because\ \text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

であり，$n = k + 1$ のときも $a_{k+1} > 3$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ が成り立つ． ……(証明終わり)

- (ii) の証明は 3 文字の相加平均・相乗平均の関係を用いることもできる．
  帰納法の仮定より $a_k > 3\ (> 0)$ であるから

$$a_{k+1} = \frac{2}{3}a_k + \frac{9}{{a_k}^2} = \frac{a_k}{3} + \frac{a_k}{3} + \frac{9}{{a_k}^2} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a_k}{3}\cdot\frac{a_k}{3}\cdot\frac{9}{{a_k}^2}} = 3$$

が成り立つ．等号が成り立つのは

$$\frac{a_k}{3} = \frac{9}{{a_k}^2} \qquad \therefore\quad {a_k}^3 = 27 \qquad \therefore\quad a_k = 3 \quad (\because\ a_k\text{は実数})$$

であるが，帰納法の仮定 $a_k > 3$ に反するから等号は成立しない．したがって

$$a_{k+1} > 3$$

である．

(2) 差をとると

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \left(\frac{2}{3}a_n + \frac{9}{{a_n}^2}\right) = \frac{{a_n}^3 - 27}{3{a_n}^2} > 0 \quad (\because\ a_n > 3)$$

であり，すべての自然数 n に対して $a_{n+1} < a_n$ が成り立つ． …… (証明終わり)

(3) ③ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 3 &= \frac{2{a_n}^2 - 3a_n - 9}{3{a_n}^2}(a_n - 3) \\ &< \frac{2{a_n}^2}{3{a_n}^2}(a_n - 3) \quad (\because\ a_n > 3) \\ &= \frac{2}{3}(a_n - 3) \end{aligned}$$

この不等式を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} a_n - 3 &< \frac{2}{3}(a_n - 3) < \left(\frac{2}{3}\right)^2 (a_{n-1} - 3) \\ &< \cdots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (a_1 - 3) = 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (\because\ ①) \end{aligned}$$

よって，2 以上のすべての自然数 n に対して

$$a_n - 3 < 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

が成り立つ．

- $n = 1$ のとき $a_1 - 3 = 10 - 3 = 7$，$7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 7$ であり，等号が成立するので，$n \geqq 2$ となっている．