正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) k を実数とする．$a_n = \log_2 x_n$，$b_n = \log_2 y_n$ とおく．このとき，数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(25 東北大 理 2 文 2)

【答】

(1) $k = 2, \ -1$

(2) $x_n = 2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}$

【解答】

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6 \qquad \cdots\cdots ③$$

(1) $a_n = \log_2 x_n$，$b_n = \log_2 y_n$ とおくと，① より

$$a_1 = \log_2 2 = 1, \quad b_1 = \log_2 2^{-1} = -1 \qquad \cdots\cdots ①'$$

である．また，2 つの数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は，正の実数からなる数列であるから，各項は対数をとることができ，② より

$$a_{n+1} = \log_2\{(x_n)^5 \cdot (y_n)^2\} = 5\log_2 x_n + 2\log_2 y_n = 5a_n + 2b_n \qquad \cdots\cdots ②'$$

であり，③ より

$$b_{n+1} = \log_2\{x_n \cdot (y_n)^6\} = \log_2 x_n + 6\log_2 y_n = a_n + 6b_n \qquad \cdots\cdots ③'$$

である．

このような $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して，数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値を求める．

$$\begin{aligned} a_{n+1} + kb_{n+1} &= (5a_n + 2b_n) + k(a_n + 6b_n) \quad (\because \ ②', \ ③') \\ &= (5+k)a_n + (2+6k)b_n \end{aligned}$$

$\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になる条件は，k が

$$\frac{2+6k}{5+k} = k \qquad \cdots\cdots ④$$

を満たすことである．この k に対し数列 $\{a_n + kb_n\}$ は

$$a_{n+1} + kb_{n+1} = (5+k)(a_n + kb_n)$$

となる．④ を解くと

$$\frac{2+6k}{5+k} = k \iff \begin{cases} 2 + 6k = k(5+k) \\ 5 + k \neq 0 \end{cases}$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \qquad \therefore \quad (k-2)(k+1) = 0 \qquad \therefore \quad k = 2, \ -1$$

これは $5 + k \neq 0$ を満たす．よって，k の値のすべては

$$\boldsymbol{k = 2, \ -1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になる条件は，すべての自然数 n について

$$a_{n+1} + kb_{n+1} = r(a_n + kb_n) \qquad \cdots\cdots \text{ア}$$

が成り立つような定数 r が存在することである．ア を a_n，b_n を用いて表すと

$$(5a_n + 2b_n) + k(a_n + 6b_n) = r(a_n + kb_n)$$
$$(5 + k)a_n + (2 + 6k)b_n = ra_n + rkb_n \qquad \cdots\cdots \text{ア}'$$

となる．ア$'$ がすべての自然数 n に対して成り立つためには，$n = 1,\ 2$ で成り立つことが必要である．①$'$ と

$$a_2 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 3, \quad b_2 = 1 + 6 \cdot (-1) = -5$$

より，ア$'$ に $n = 1,\ 2$ を代入すると

$$\begin{cases} (5 + k) \cdot 1 + (2 + 6k) \cdot (-1) = r \cdot 1 + rk \cdot (-1) & \cdots\cdots \text{イ} \\ (5 + k) \cdot 3 + (2 + 6k) \cdot (-5) = r \cdot 3 + rk \cdot (-5) & \cdots\cdots \text{ウ} \end{cases}$$

が成り立ち

$$\frac{\text{イ} \times 5 - \text{ウ}}{2} \text{ より} \quad 5 + k = r$$
$$\frac{\text{イ} \times 3 - \text{ウ}}{2} \text{ より} \quad 2 + 6k = rk$$

を得る．逆に

$$\begin{cases} 5 + k = r \\ 2 + 6k = rk \end{cases} \qquad \cdots\cdots \text{エ}$$

ならば，ア$'$ はすべての自然数 n について成り立つから十分である．エ を解くと

$$(k,\ r) = (2,\ 7),\ (-1,\ 4)$$

である．よって，k の値のすべては

$$k = 2,\ -1$$

である．

(2) $k = 2$ のとき，数列 $\{a_n + 2b_n\}$ は初項 $a_1 + 2b_1 = 1 + 2 \cdot (-1) = -1$，公比 $5 + 2 = 7$ の等比数列であるから

$$a_n + 2b_n = (-1) \cdot 7^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

である．

$k = -1$ のとき，数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1 - (-1) = 2$，公比 $5 + (-1) = 4$ の等比数列であるから

$$a_n - b_n = 2 \cdot 4^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑨$$

である．

$\dfrac{⑧ + ⑨ \times 2}{3}$ より

$$a_n = \frac{(-1) \cdot 7^{n-1} + 4 \cdot 4^{n-1}}{3} = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}$$

$$\therefore \quad x_n = 2^{a_n} = \boldsymbol{2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．