数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=3a_n+2n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2 を求めよ．
(2) 数列 $\{a_n\}$ が満たす漸化式を求めよ．
(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(25 東北学院大 文系・情報 B 6)

【答】

(1) $a_1=-\dfrac{3}{2}$，$a_2=-\dfrac{13}{4}$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n-1$

(3) $a_n=2-\dfrac{7}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

【解答】

$$S_n=3a_n+2n+1\ (n\geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $n=1$ のとき，① は

$$a_1=3a_1+2\cdot 1+1 \quad (\because\ S_1=a_1)$$

$$\therefore\ \ 2a_1=-3 \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{a_1=-\frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，$n=2$ のとき，① は

$$-\frac{3}{2}+a_2=3a_2+2\cdot 2+1$$

$$\therefore\ \ 2a_2=-\frac{3}{2}-5 \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{a_2=-\frac{13}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ① において，n を $n+1$ とおくと

$$S_{n+1}=3a_{n+1}+2(n+1)+1 \qquad \cdots\cdots ②$$

① と ② の辺々を引く．$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから

$$a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n-1} \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ③ は

$$a_{n+1}-2=\frac{3}{2}(a_n-2)$$

と変形される．数列 $\{a_n-2\}$ は初項 $a_1-2=-\dfrac{3}{2}-2=-\dfrac{7}{2}$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n-2=-\frac{7}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{a_n=2-\frac{7}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．