以下によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，第 11 項は $a_{11} = \boxed{\text{（ち）}}$ である．

$$a_1 = 2\sqrt{2},\ a_{n+1} + \sqrt{3}a_n = \sqrt{2} + \sqrt{6} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(25 茨城大 後 工 2(4))

【答】

（ち）
$244\sqrt{2}$

【解答】

$$a_1 = 2\sqrt{2},\ a_{n+1} + \sqrt{3}a_n = \sqrt{2} + \sqrt{6} \quad (n \geqq 1)$$

この漸化式は

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = -\sqrt{3}(a_n - \sqrt{2})$$

と変形できる．数列 $\{a_n - \sqrt{2}\}$ は初項 $a_1 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$，公比 $-\sqrt{3}$ の等比数列であるから

$$a_n - \sqrt{2} = \sqrt{2}(-\sqrt{3})^{n-1}$$
$$\therefore \quad a_n = \sqrt{2} + \sqrt{2}(-\sqrt{3})^{n-1}$$

である．

よって，第 11 項 a_{11} の値は

$$a_{11} = \sqrt{2} + \sqrt{2}(-\sqrt{3})^{10} = (1 + 3^5)\sqrt{2} = \mathbf{244\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．