次のように定められた数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1=10,\quad a_{n+1}=10\sqrt{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n=\log_{10}a_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n の式で表すと $b_{n+1}=\boxed{\text{キ}}$ である．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(3) $a_n \geqq 60$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．

(25 青山学院大 社会情報 B 3)

【答】

キ	ク	ケ
$1+\dfrac{1}{2}b_n$	$10^{2-2^{1-n}}$	4

【解答】

$$a_1=10,\quad a_{n+1}=10\sqrt{a_n}\quad (n\geqq 1)\qquad \cdots\cdots\ (*)$$

(1) $(*)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ は，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して $a_n>0$ であることがわかる．辺々の常用対数をとると

$$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}(10\sqrt{a_n})$$

$$\log_{10}a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\log_{10}a_n$$

であり，$b_n=\log_{10}a_n$ とおくと

$$b_{n+1}=\boldsymbol{1+\frac{1}{2}b_n}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

が得られる．

(2) (1) の漸化式は

$$b_{n+1}-2=\frac{1}{2}(b_n-2)$$

と変形される．数列 $\{b_n-2\}$ は初項 $b_1-2=\log_{10}a_1-2=\log_{10}10-2=-1$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-2=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n=2-2^{1-n}$$

であり，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\log_{10}a_n=2-2^{1-n}$$

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{10^{2-2^{1-n}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $a_n\geqq 60$ となる最小の自然数 n は

$$10^{2-2^{1-n}}\geqq 60$$

を満たす最小の自然数である．これは

$$2-2^{1-n}\geqq \log_{10}60$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\leqq 2-\log_{10}60$$

$$2^{n-1}\geqq\frac{1}{2-\log_{10}60}\qquad\cdots\cdots\ ①$$

と変形される．ここで

$$\begin{aligned}2-\log_{10}60 &= 2-(1+\log_{10}2+\log_{10}3) = 2-(1+0.3010+0.4771)\\ &= 2-1.7781\\ &= 0.2219\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & 0.2 < 2-\log_{10}60 < 0.25\\ & \frac{1}{5} < 2-\log_{10}60 < \frac{1}{4}\\ & 5 > \frac{1}{2-\log_{10}60} > 4\end{aligned}$$

$2^2=4,\ 2^3=8$ より，① を満たす最小の自然数 n は

$$n-1=3 \qquad \therefore\quad n=\mathbf{4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．