n を自然数とする．各項が $-1,\ 0,\ 1$ のどれかである項数 n の数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を n 項 T 数列と呼び，$S_n = \sum\limits_{k-1}^{n} a_k$ とする．

(1) S_2 が偶数となる 2 項 T 数列は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個ある．

(2) S_n が偶数となる n 項 T 数列の個数を x_n とおくとき，x_{n+1} を x_n の式で表すと，$x_{n+1} = \boxed{\text{オ}}$ となる．

(3) S_n が偶数となる n 項 T 数列は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 個ある．

(25 青山学院大 社会情報 C 2)

【答】

エ	オ	カ
5	$-x_n + 2 \cdot 3^n$	$\dfrac{1}{2}\{3^n + (-1)^n\}$

【解答】

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (a_k = -1,\ 0,\ 1)$$

(1) S_2 は $-2 \leqq S_2 \leqq 2$ を満たす整数であるから，S_2 が偶数となるのは

$$S_2 = -2,\ 0,\ 2$$

のときである．

- $S_2 = -2$ となる 2 項 T 数列は　$\{-1,\ -1\}$
- $S_2 = 0$ となる 2 項 T 数列は　$\{-1,\ 1\}$，$\{0,\ 0\}$，$\{1,\ -1\}$
- $S_2 = 2$ となる 2 項 T 数列は　$\{1,\ 1\}$

であり，ぜんぶで **5** 個ある．　……(答)

(2) S_n が偶数となる n 項 T 数列の個数を x_n，奇数となる n 項 T 数列の個数を y_n とおくと

$$x_n + y_n = 3^n \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

また，$(n+1)$ 項 T 数列 $\{a_1,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1}\}$ において，S_{n+1} が偶数となるのは

- S_n が偶数かつ $a_{n+1} = 0$ である
- S_n が奇数かつ $a_{n+1} = -1$ または 1 である

のいずれかであるから

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \cdot 1 + y_n \cdot 2 \\ &= x_n + 2(3^n - x_n) \quad (\because ①) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_{n+1} = \boldsymbol{-x_n + 2 \cdot 3^n} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

(3) すべての自然数 n に対して

$$\alpha(n+1) = -\alpha(n) + 2 \cdot 3^n \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ関数 $\alpha(n)$ がみつかれば，②, ③ の辺々を引くことにより，すべての自然数 n に対して成り立つ等式

$$x_{n+1} - \alpha(n+1) = -\{x_n - \alpha(n)\}$$

を得ることができる．数列 $\{x_n - \alpha(n)\}$ は公比 -1 の等比数列である．

定数 p を用いて $\alpha(n) = p \cdot 3^n$ とおくと，③ は

$$p \cdot 3^{n+1} = -p \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n$$
$$3p = -p + 2 \qquad \therefore \quad p = \frac{1}{2}$$

となる．したがって，② は

$$x_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} = -\left(x_n - \frac{1}{2} \cdot 3^n\right)$$

と変形される．

S_1 が偶数となる 1 項 T 数列は $\{0\}$ の 1 個であり，$x_1 = 1$ である．

数列 $\left\{x_n - \frac{1}{2} \cdot 3^n\right\}$ は初項 $x_1 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$，公比 -1 の等比数列であるから

$$x_n - \frac{1}{2} \cdot 3^n = \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}(-1)^n$$

$$\therefore \quad x_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}\{3^n + (-1)^n\}} \qquad (n \geqq 1)$$ ……(答)

である．

- 次のようにして一般項 x_n を求めることもできる．

  ② の辺々に $(-1)^{n+1}$ を掛けると

$$(-1)^{n+1} x_{n+1} = (-1)^n x_n - 2 \cdot (-3)^n$$

となる．$x_1 = 1$ であることに注意すると，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}(-1)^n x_n &= (-1)x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{-2 \cdot (-3)^k\} \\ &= -1 + \frac{6\{1 - (-3)^{n-1}\}}{1 - (-3)} \\ &= -1 + \frac{3}{2}\{1 - (-3)^{n-1}\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-3)^n \\ \therefore \quad x_n &= \frac{1}{2}\{3^n + (-1)^n\}\end{aligned}$$

である．これは $n = 1$ のときも成り立つ．

よって

$$x_n = \frac{1}{2}\{3^n + (-1)^n\} \quad (n \geqq 1)$$

である．