投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある．A，B，C の 3 文字を BCA のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う．

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる．
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる．

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる．

最初の文字列は ABC であるとする．コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし，BCA である確率を q_n とする．

(1) k を正の整数とするとき，$p_{2k}-q_{2k}$ を求めよ．
(2) n を正の整数とするとき，p_n を求めよ．

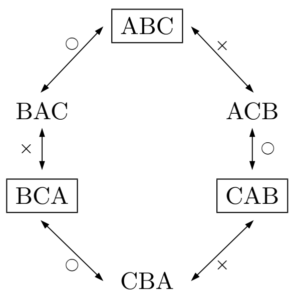
(25 大阪大 理系 5)

【答】

(1) $p_{2k}-q_{2k}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

(2) $p_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (n\text{ が偶数のとき})\\ 0 & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$

【解答】



(1) A，B，C の 3 文字の並び方は $3!=6$ 通りあり，コインを投げて表が出ることを○，裏が出ることを × で表すと文字列の推移は右図となる．

最初の文字列が ABC であるから，

偶数回目の文字列は ABC，BCA，CAB のいずれか，
奇数回目の文字列は BAC，CBA，ACB のいずれか

である．

n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率が p_n，BCA である確率が q_n であるから，CAB である確率を r_n とおくと

$$\begin{cases} p_{2(k+1)}=p_{2k}\cdot\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)+q_{2k}\cdot\dfrac{1}{4}+r_{2k}\cdot\dfrac{1}{4}\\ q_{2(k+1)}=p_{2k}\cdot\dfrac{1}{4}+q_{2k}\cdot\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)+r_{2k}\cdot\dfrac{1}{4}\\ r_{2(k+1)}=p_{2k}\cdot\dfrac{1}{4}+q_{2k}\cdot\dfrac{1}{4}+r_{2k}\cdot\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases} p_{2(k+1)}=\dfrac{1}{2}p_{2k}+\dfrac{1}{4}q_{2k}+\dfrac{1}{4}r_{2k} & \cdots\cdots ①\\ q_{2(k+1)}=\dfrac{1}{4}p_{2k}+\dfrac{1}{2}q_{2k}+\dfrac{1}{4}r_{2k} & \cdots\cdots ②\\ r_{2(k+1)}=\dfrac{1}{4}p_{2k}+\dfrac{1}{4}q_{2k}+\dfrac{1}{2}r_{2k} & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

が成り立つ．①，② の辺々を引くと

$$p_{2(k+1)}-q_{2(k+1)}=\dfrac{1}{4}\left(p_{2k}-q_{2k}\right)$$

が成り立つ．最初の文字列は ABC であるから

$$p_0 = 1,\ q_0 = 0$$

であり

$$p_{2k} - q_{2k} = (p_0 - q_0)\left(\frac{1}{4}\right)^k = (1-0)\left(\frac{1}{4}\right)^k = \boldsymbol{\left(\frac{1}{4}\right)^k} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $p_{2k} + q_{2k} + r_{2k} = 1$ より，① は

$$p_{2(k+1)} = \frac{1}{4}p_{2k} + \frac{1}{4}(p_{2k} + q_{2k} + r_{2k})$$

$$\therefore \quad p_{2(k+1)} = \frac{1}{4}p_{2k} + \frac{1}{4}$$

となり

$$p_{2(k+1)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left(p_{2k} - \frac{1}{3}\right)$$

と変形される．

$$p_{2k} - \frac{1}{3} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$\therefore \quad p_{2k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k \qquad \cdots\cdots ③$$

である．

n が奇数のとき $p_n = 0$ である．

n が偶数のとき $n = 2k$ であり，③ を n で表すと

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる．

よって

$$\boldsymbol{p_n = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n & (n\ \text{が偶数のとき}) \\ 0 & (n\ \text{が奇数のとき}) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- (1) では「k は正の整数」となっているが，k は 0 以上の整数で成り立ち，(2) では「n は正の整数」となっているが，n は 0 以上の整数で成り立つ．
- (2) では (1) の結果を使わずに p_n を求めた．次のように考えることもできる．

①, ② の辺々を加えると

$$\begin{aligned} p_{2(k+1)} + q_{2(k+1)} &= \frac{1}{4}p_{2k} + \frac{1}{4}q_{2k} + \frac{1}{2}(p_{2k} + q_{2k} + r_{2k}) \\ &= \frac{1}{4}(p_{2k} + q_{2k}) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であり，これは

$$\therefore \quad p_{2(k+1)} + q_{2(k+1)} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(p_{2k} + q_{2k} - \frac{2}{3}\right)$$

と変形される．最初の文字列は ABC であるから

$$p_0 = 1,\ q_0 = 0$$

であり

$$p_{2k} + q_{2k} - \frac{2}{3} = \left(p_0 - q_0 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(1 - 0 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

である．(1) の結果と連立して

$$\begin{cases} p_{2k} + q_{2k} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k \\ p_{2k} - q_{2k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k \end{cases}$$

辺々加えて

$$2p_{2k} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$
$$\therefore \quad p_{2k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

を得る．以下,【解答】と同じ．

- ③ の利用も考える．

①，③ の辺々を引くと

$$p_{2(k+1)} - r_{2(k+1)} = \frac{1}{4}\left(p_{2k} - r_{2k}\right)$$

であり，$p_0 = 1$，$q_0 = 0$ であるから

$$p_{2k} - r_{2k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

を得る．(1) の結果と連立して

$$\begin{cases} p_{2k} - q_{2k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k \\ p_{2k} - r_{2k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k \end{cases}$$

辺々加えると

$$2p_{2k} - q_{2k} - r_{2k} = 2\left(\frac{1}{4}\right)^k$$
$$3p_{2k} - (p_{2k} + q_{2k} + r_{2k}) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$p_{2k} + q_{2k} + r_{2k} = 1$ であるから

$$p_{2k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

を得る．以下,【解答】と同じ．