ある作物の種を N 日間続けて畑にまくとする．ただし，N は2以上の自然数とする．

N 日間毎日，まだ種がまかれていない畑の部分に種をまく．そして，その日に種をまいた部分には $1\mathrm{m}^2$ 当たり 10L の水をまき，その前日までに種をまいた部分には $1\mathrm{m}^2$ 当たり 5L の水をまく．

さらに，2 日目から N 日目については，その日にまく水の総体積がその前日にまいた水の総体積より 3L 少なくなるように，種をまく部分の面積を調整する．

以上の条件を満たすように 1 日目から N 日目まで畑に種と水をまくことができたとし，$1 \leqq n \leqq N$ の範囲の自然数 n に対し，n 日目に種をまいた部分の面積 (m^2) を a_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $1 \leqq n \leqq N$ の範囲の自然数 n に対し，a_n を a_1 と n を用いて表せ．

(2) $N = 5$ とし，1 日目から 5 日目までの 5 日間で種をまいた部分の面積の合計が $90\mathrm{m}^2$ であったとする．このとき，5 日目に種をまいた部分の面積 (m^2)，および 5 日目にまいた水の総体積 (L) を求めよ．

(25 岩手大 農・獣医 5)

【答】

(1) $a_n = -\dfrac{3}{5} + \left(a_1 + \dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) $\dfrac{12}{5}$ (m^2)，462 (L)

【解答】

(1) a_n は n 日目に種をまいた部分の面積 (m^2) であり，n 日目にまいた水の総体積 (L) を w_n とおく．

N 日間毎日，種をまいた部分には $1\mathrm{m}^2$ 当たり 10L の水をまき，その前日までに種をまいた部分には $1\mathrm{m}^2$ 当たり 5L の水をまく．ただし，その日にまく水の総体積がその前日にまいた水の総体積より 3L 少なくなるようにまくから，$2 \leqq n \leqq N$ のとき

$$\begin{cases} w_1 = 10a_1 & \cdots\cdots ① \\ w_n = 10a_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 5a_k & \cdots\cdots ② \\ w_n = w_{n-1} - 3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．②, ③ より，$3 \leqq n \leqq N$ のとき

$$10a_n + \sum_{k=1}^{n-1} 5a_k = \left(10a_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} 5a_k\right) - 3$$

$$10a_n + 5a_{n-1} = 10a_{n-1} - 3$$

$$\therefore\quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{3}{10} \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．② において $n=2$ とおくと

$$w_2 = 10a_2 + 5a_1$$

であり，③ において $n=2$ とおいた式に代入すると

$$10a_2 + 5a_1 = 10a_1 - 3 \quad (\because ①)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 - \frac{3}{10}$$

となり，④ は $n=2$ のときも成り立つ．④ は

$$a_n+\frac{3}{5}=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{3}{5}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{a_n+\dfrac{3}{5}\right\}$ は初項 $a_1+\dfrac{3}{5}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n+\frac{3}{5}=\left(a_1+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=-\frac{3}{5}+\left(a_1+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\quad (1\leqq n\leqq N) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $$\sum_{k=1}^{5}a_k=90 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

⑤ が成り立つときの a_5，w_5 を求める．(1) の結果式より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}a_k&=\sum_{k=1}^{5}\left\{-\frac{3}{5}+\left(a_1+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}\\&=-\frac{3}{5}\cdot 5+\left(a_1+\frac{3}{5}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}\\&=-3+\left(a_1+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{31}{16}\end{aligned}$$

であるから，⑤ より

$$-3+\left(a_1+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{31}{16}=90$$

$$\therefore\quad a_1+\frac{3}{5}=(90+3)\frac{16}{31}=48$$

を得る．したがって

$$a_n=-\frac{3}{5}+48\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であり

$$a_5=-\frac{3}{5}+48\left(\frac{1}{2}\right)^4=-\frac{3}{5}+3=\boldsymbol{\frac{12}{5}\ (\mathrm{m}^2)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，② より

$$\begin{aligned}w_5&=10a_5+5\sum_{k=1}^{4}a_k=10a_5+5(90-a_5)\quad (\because\ ⑤)\\&=5a_5+450=5\cdot\frac{12}{5}+450=\boldsymbol{462\ (\mathrm{L})}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．