

数列 $\{a_n\}$ に対し $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくとき,

$$S_n = \frac{3}{2}a_n + \frac{5}{4}n^2 - \frac{1}{4}n - \frac{3}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つとする.

(1) $a_1 = \boxed{34}$ である.

(2) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+1} = \boxed{35}a_n - \boxed{36}n - \boxed{37} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす.

(3) k, ℓ を定数として

$$b_n = a_n + kn + \ell \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく. このとき,

$$k = \frac{\boxed{38}\boxed{39}}{\boxed{40}}, \quad \ell = \frac{\boxed{41}\boxed{42}}{\boxed{43}}$$

であれば数列 $\{b_n\}$ は等比数列になる.

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\boxed{44}\boxed{45}}{\boxed{46}}\boxed{47}^n + \frac{\boxed{48}}{\boxed{49}}n + \frac{\boxed{50}}{\boxed{51}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である.

(25 青山学院大 全学部 文系 3)

【答】

34	35	36	37	3839	40	4142	43	4445	46	47	48	49	50	51
1	3	5	2	-5	2	-9	4	-5	4	3	5	2	9	4

【解答】

$$S_n = \frac{3}{2}a_n + \frac{5}{4}n^2 - \frac{1}{4}n - \frac{3}{2} \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(1) $S_1 = a_1$ であることに注意し, $\textcircled{1}$ において $n = 1$ とおくと

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2}a_1 + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}a_1 &= -\frac{1}{2} \quad \therefore a_1 = 1 \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

(2) $\textcircled{1}$ において, n を $n+1$ とおくと

$$S_{n+1} = \frac{3}{2}a_{n+1} + \frac{5}{4}(n+1)^2 - \frac{1}{4}(n+1) - \frac{3}{2} \quad (n \geq 0) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{1}$ の辺々を引く. $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{2}(a_{n+1} - a_n) + \frac{5}{4}\{(n+1)^2 - n^2\} - \frac{1}{4}\{(n+1) - n\} \quad (n \geq 1) \\ -\frac{1}{2}a_{n+1} &= -\frac{3}{2}a_n + \frac{5}{4}(2n+1) - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{3}{2}a_n + \frac{5}{2}n + 1 \\ \therefore a_{n+1} &= 3a_n - 5n - 2 \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

を満たす.

(3) $b_n = a_n + kn + \ell$ (k, ℓ は定数) とおくと, $a_n = b_n - kn - \ell$ であり, ③ は

$$b_{n+1} - k(n+1) - \ell = 3(b_n - kn - \ell) - 5n - 2$$

$$b_{n+1} = 3b_n - (2k+5)n + k - 2\ell - 2$$

となる. このとき, すべての正の整数 n について

$$-(2k+5)n + k - 2\ell - 2 = 0$$

となる定数 k, ℓ であれば, 数列 $\{b_n\}$ は等比数列になる. すなわち

$$\begin{cases} 2k+5=0 \\ k-2\ell-2=0 \end{cases} \quad \therefore \quad k = -\frac{5}{2}, \ell = -\frac{9}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

(4) (3) より

$$b_{n+1} = 3b_n$$

であるから, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 - \frac{5}{2} \cdot 1 - \frac{9}{4} = 1 - \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = -\frac{15}{4}$, 公比 3 の等比数列である.

$$b_n = -\frac{15}{4} \cdot 3^{n-1} = -\frac{5}{4} \cdot 3^n$$

であり, $b_n = a_n - \frac{5}{2}n - \frac{9}{4}$ であるから

$$a_n - \frac{5}{2}n - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4} \cdot 3^n$$

$$\therefore a_n = -\frac{5}{4} \cdot 3^n + \frac{5}{2}n + \frac{9}{4} \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

- ③ の解き方はいくつかある.

(別解 1) ③ の n を $n+1$ とおくと

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 5(n+1) - 2 \quad \dots\dots ③'$$

③, ③' の辺々を引くと

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) - 5$$

であり, これは次のように変形される.

$$a_{n+2} - a_{n+1} - \frac{5}{2} = 3\left(a_{n+1} - a_n - \frac{5}{2}\right)$$

数列 $\left\{a_{n+1} - a_n - \frac{5}{2}\right\}$ は初項 $a_2 - a_1 - \frac{5}{2} = (3 - 5 - 2) - 1 - \frac{5}{2} = -\frac{15}{2}$, 公比 3 の等比数列である.

$$a_{n+1} - a_n - \frac{5}{2} = -\frac{15}{2} \cdot 3^{n-1} = -\frac{5}{2} \cdot 3^n$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = \frac{5}{2}(1 - 3^n)$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{5}{2}(1 - 3^k) \\ &= 1 + \frac{5}{2}(n-1) - \frac{5}{2} \cdot \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{5}{2}n - \frac{3}{2} - \frac{15}{4}(3^{n-1} - 1) \\ &= -\frac{5}{4} \cdot 3^n + \frac{5}{2}n + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ.

よって

$$a_n = -\frac{5}{4} \cdot 3^n + \frac{5}{2}n + \frac{9}{4} \quad (n \geq 1)$$

である.

(別解 2) ③ の辺々を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - \frac{5n+2}{3^{n+1}}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{5k+2}{3^{k+1}}$$

である. $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{5k+2}{3^{k+1}}$ とおく.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{7}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \frac{17}{3^4} + \cdots + \frac{5(n-1)+2}{3^n} \\ \frac{1}{3}T_n &= \frac{7}{3^3} + \frac{12}{3^4} + \cdots + \frac{5(n-2)+2}{3^n} + \frac{5(n-1)+2}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

辺々ひくと

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}T_n &= \frac{7}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \cdots + \frac{5}{3^n} - \frac{5n-3}{3^{n+1}} \\ T_n &= \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \cdots + \frac{5}{3^n} - \frac{5n-3}{3^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \cdots + \frac{5}{3^{n-1}} - \frac{5n-3}{3^n} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{5}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{5n-3}{2 \cdot 3^n} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} - \frac{5n-3}{2 \cdot 3^n} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{4} - \frac{10n+9}{4 \cdot 3^n} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{4} - \frac{10n+9}{4 \cdot 3^n} \right) \right\} \\ &= -\frac{5}{4} \cdot 3^n + \frac{5n}{2} + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ.

よって

$$a_n = -\frac{5}{4} \cdot 3^n + \frac{5}{2}n + \frac{9}{4} \quad (n \geq 1)$$

である.