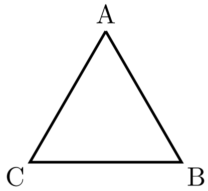
次のような1辺の長さが1の正三角形 ABC がある．



次の操作に従って正三角形 ABC の辺上を動く点 P がある．

操作： 青球2個，赤球2個，白球1個が入った袋から球を1個取り出し，色を調べてからもとに戻す．取り出した球が青球ならば点 P を時計回りに1だけ移動させ，赤球ならば点 P を反時計回りに1だけ移動させる．また，取り出した球が白球ならば点 P を頂点 A に移動させる．ただし，点 P が頂点 A にあるときに取り出した球が白球ならば点 P を動かさない．

最初に点 P が頂点 A にあるとし，上の操作を n 回くり返した後に点 P が頂点 A にある確率を p_n とする．

(1) $p_1 = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$，$p_2 = \dfrac{\boxed{3}\boxed{4}}{\boxed{5}\boxed{6}}$ である．

(2) 数列 $\{p_n\}$ は漸化式

$$p_{n+1} = \frac{\boxed{7}\boxed{8}}{\boxed{9}} p_n + \frac{\boxed{10}}{\boxed{11}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす．

(3) 数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$p_n = \frac{\boxed{12}}{\boxed{13}} \left(\frac{\boxed{14}\boxed{15}}{\boxed{16}} \right)^n + \frac{\boxed{17}}{\boxed{18}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(25 青山学院大 全学部 理系 1)

【答】

1	2	34	56	78	9	10	11	12	13	1415	16	17	18
1	5	13	25	−2	5	3	5	4	7	−2	5	3	7

【解答】

点 P を時計回りに1だけ移動させる確率は $\dfrac{2}{5}$

点 P を反時計回りに1だけ移動させる確率は $\dfrac{2}{5}$

点 P を頂点 A に移動させる確率は $\dfrac{1}{5}$

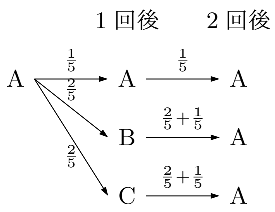
ただし，点 P が頂点 A にあるときに点 P を動かさない確率は $\dfrac{1}{5}$

(1) 最初に P は A にあるから，操作を 1 回くり返した後に P が A にある確率 p_1 は

$$p_1 = \mathbf{\frac{1}{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

　また，右の推移図より，操作を 2 回くり返した後に P が A にある確率 p_2 は



$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right) + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{1+6+6}{25} \\ &= \mathbf{\frac{13}{25}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(2) $n+1$ 回後に点 P が頂点 A にあるのは

- n 回後に P は A にあり，$n+1$ 回後も P は A にある
- n 回後に P は A 以外にあり，$n+1$ 回後に P は A にある

のいずれかである．これらは排反であるから，数列 $\{p_n\}$ は

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{1}{5} + (1-p_n)\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)$$

$$\therefore\quad p_{n+1} = \mathbf{\frac{-2}{5}}p_n + \mathbf{\frac{3}{5}} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

を満たす．

(3) ① は

$$p_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{2}{5}\left(p_n - \frac{3}{7}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{p_n - \frac{3}{7}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{3}{7} = \frac{1}{5} - \frac{3}{7} = -\frac{8}{35}$，公比 $-\frac{2}{5}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{3}{7} = -\frac{8}{35}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad p_n = \mathbf{\frac{4}{7}\left(\frac{-2}{5}\right)^{n} + \frac{3}{7}} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．