xy 平面上に放物線 $y=-x^2$ がある．点 $(1,\ a)$ $(a>-1)$ からこの放物線に引いた 2 本の接線が直交するとき，a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ．

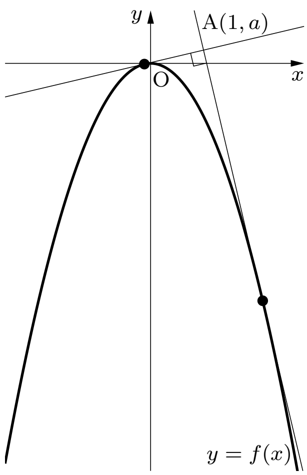
(25 青山学院大 社会情報 B 4)

【答】 $a=\dfrac{1}{4}$，$y=-(2\pm\sqrt{5})x+\dfrac{9}{4}\pm\sqrt{5}$ (複号同順)

【解答】

$f(x)=-x^2$ とおく．

$$f'(x)=-2x$$



放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ -t^2)$ における接線の方程式は

$$y=-2t(x-t)-t^2$$

$$\therefore\quad y=-2tx+t^2$$

である．これが点 $(1,\ a)$ を通るのは，t が

$$a=-2t+t^2$$

$$t^2-2t-a=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たすときである．

$$\frac{\text{判別式}}{4}=(-1)^2-(-a)$$

$$=1+a>0 \quad (\because\ a>-1)$$

であるから，① は異なる 2 つの実数解をもつ．それを $\alpha,\ \beta$ とおくと，2 本の接線が直交するための条件は

$$f'(\alpha)f'(\beta)=-1$$

$$(-2\alpha)(-2\beta)=-1$$

$$4(-a)=-1 \quad (\because\ \text{解と係数の関係})$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=\frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．このとき ① は

$$t^2-2t-\frac{1}{4}=0$$

$$\therefore\quad t=1\pm\sqrt{1+\frac{1}{4}}=1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

であり，2 本の接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-(2\pm\sqrt{5})x+\frac{9}{4}\pm\sqrt{5}} \quad \textbf{(複号同順)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．