正の定数 $a>0$ に対し，xy 平面上の放物線 $y=\dfrac{1}{2a}x^2$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{2a}\right)$ (ただし $t \neq 0$) における法線 n_t に関して，直線 $x=t$ と対称な直線を ℓ_t とする．以下の問いに答えよ．

(1) 法線 n_t の方程式を a, t を用いて表せ．
(2) 直線 ℓ_t の傾きを a, t を用いて表せ．
(3) 直線 ℓ_t は t によらない一つの定点を通ることを示せ．

(25 鳥取大 医 4)

【答】

(1) $n_t : y=-\dfrac{a}{t}x+a+\dfrac{t^2}{2a}$
(2) $\dfrac{t^2-a^2}{2at}$
(3) $\left(0,\ \dfrac{a}{2}\right)$

【解答】

$$y=\frac{1}{2a}x^2 \quad (a>0)$$

(1)
$$y'=\frac{x}{a}$$

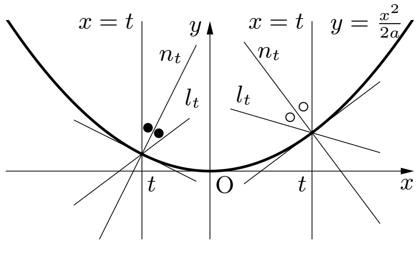
より，放物線上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{2a}\right)$ (ただし $t \neq 0$) における法線 n_t の方程式は

$$y=-\frac{a}{t}(x-t)+\frac{t^2}{2a}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{n_t : y=-\frac{a}{t}x+a+\frac{t^2}{2a}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) n_t と x 軸正方向とのなす角を α，ℓ_t と x 軸正方向とのなす角を α' とおく．n_t に関して，直線 $x=t$ と直線 ℓ_t は対称であるから



$$\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha'}{2}=\alpha \qquad \therefore \quad \alpha'=2\alpha-\frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．

$$\tan\alpha=-\frac{a}{t}$$

であるから，ℓ_t の傾き $\tan\alpha'$ は

$$\tan\alpha'=\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan 2\alpha}=-\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$$

$$=-\frac{1-\frac{a^2}{t^2}}{2\left(-\frac{a}{t}\right)}=\boldsymbol{\frac{t^2-a^2}{2at}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (2) より ℓ_t の方程式は

$$y = \frac{t^2 - a^2}{2at}(x - t) + \frac{t^2}{2a}$$
$$2aty = (t^2 - a^2)(x - t) + t^3$$
$$2aty = (t^2 - a^2)x + a^2 t$$
$$\therefore \quad xt^2 + (a^2 - 2ay)t - a^2 x = 0$$

となる．これがすべて実数 $(t \fallingdotseq 0)$ に対して成り立つ条件は

$$\begin{cases} x = 0 \\ a^2 - 2ay = 0 \\ a^2 x = 0 \end{cases}$$

$a > 0$ であるから

$$x = 0,\ y = \frac{a}{2}$$

が得られる．よって，直線 ℓ_t は t によらず定点 $\boldsymbol{\left(0,\ \frac{a}{2}\right)}$ を通る． ……(答)

- 放物線 $y = \frac{1}{2a}x^2$ を標準形に直すと

  $$x^2 = 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot y$$

  であり，定点 $\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$ は放物線 $y = \frac{1}{2a}x^2$ の焦点である．