3 次関数

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(2+k)x^2+6kx$$

について，次の問いに答えよ．ただし，k は実数の定数とする．

(1) $k=1$ のとき，$y=f(x)$ のグラフをかけ．また，区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

(2) $k>2$ のとき，区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を k を用いて表し，そのときの x の値を求めよ．

(25 東京海洋大 生命・資源 1)

【答】

(1) グラフは略．$x=3$ のとき，最大値 $\dfrac{9}{2}$

(2) $\begin{cases} 2<k<\dfrac{8}{3} \text{のとき} & x=3 \text{ で} \quad \text{最大値} \dfrac{9}{2}k \\ k=\dfrac{8}{3} \text{のとき} & x=2,\ 3 \text{ で} \quad \text{最大値 } 12 \\ \dfrac{8}{3}<k \text{ のとき} & x=2 \text{ で} \quad \text{最大値 } 6k-4 \end{cases}$

【解答】

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(2+k)x^2+6kx$$

(1) $k=1$ のとき

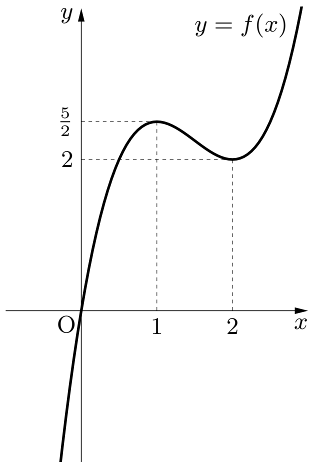
$$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x$$

であり

$$\begin{aligned} f'(x)&=3x^2-9x+6 \\ &=3(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

である．$f(x)$ の増減は下表となり，グラフは右図となる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$



また，$-2 \leqq x \leqq 3$ における右端の値 $f(3)$ は

$$\begin{aligned} f(3)&=3^3-\frac{9}{2}\cdot 3^2+6\cdot 3 \\ &=\left(3-\frac{9}{2}+2\right)\cdot 3^2 \\ &=\frac{9}{2} \end{aligned}$$

であり，極大値 $f(1)$ と $f(3)$ の大小を比較すると

$$f(1)<f(3)$$

であるから，$-2 \leqq x \leqq 3$ において $f(x)$ は

$\boldsymbol{x=3}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$ ……(答)

をとる．

(2) $k>2$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-3(2+k)x+6k \\ &= 3(x-2)(x-k) \end{aligned}$$

であり，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	2	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$-2 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値 M は極大値 $f(2)$ と右端の値 $f(3)$ のうちの小さくない方である．

$$f(2)=2^3-6(2+k)+12k=6k-4$$

$$f(3)=3^3-\frac{3^3}{2}(2+k)+18k=\frac{9}{2}k$$

であるから

$f(2)>f(3)$ となる k の範囲は　$6k-4>\dfrac{9}{2}k$　　$\therefore$　$k>\dfrac{8}{3}$

$f(2)=f(3)$ となる k の値は　$6k-4=\dfrac{9}{2}k$　　$\therefore$　$k=\dfrac{8}{3}$

$f(2)<f(3)$ となる k の範囲は　$6k-4<\dfrac{9}{2}k$　　$\therefore$　$k<\dfrac{8}{3}$

である．よって，$k>2$ のときの最大値 M は

$$\begin{cases} \boldsymbol{2<k<\dfrac{8}{3}}\text{ のとき} & \boldsymbol{x=3}\text{ で} \quad \boldsymbol{M=\dfrac{9}{2}k} \\ \boldsymbol{k=\dfrac{8}{3}}\text{ のとき} & \boldsymbol{x=2,\ 3}\text{ で} \quad \boldsymbol{M=12} \\ \boldsymbol{\dfrac{8}{3}<k}\text{ のとき} & \boldsymbol{x=2}\text{ で} \quad \boldsymbol{M=6k-4} \end{cases}$$

……(答)

である．