実数 x に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x + 4\sin x\cos x$$

により定める．また，$t = \sin x + \cos x$ とおく．次の問 (1)〜(4) に答えよ．解答欄には，(1)，(2) については答えのみを，(3)，(4) については答えだけでなく途中経過も書くこと．

(1) $\sin x\cos x$ を t を用いて表せ．
(2) $f(x)$ を t を用いて表せ．
(3) x がすべての実数を動くとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．
(4) x がすべての実数を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

(25 立教大 理 (数・物・化・生) 2 月 9 日 2)

【答】

(1) $\dfrac{t^2-1}{2}$

(2) $\dfrac{1}{2}(-t^3+4t^2+3t-4)$

(3) $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

(4) 最大値 $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$，最小値 $-\dfrac{61}{27}$

【解答】

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x + 4\sin x\cos x$$

(1) $t = \sin x + \cos x$ であるから

$$\begin{aligned} t^2 &= \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x \\ &= 1 + 2\sin x\cos x \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x\cos x(\sin x + \cos x) \\ &= t^3 - 3\cdot\frac{t^2-1}{2}\cdot t \\ &= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t\right) + 4\cdot\frac{t^2-1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(-t^3+4t^2+3t-4)} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(3) 合成の公式により

$$t = \sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，x がすべての実数を動くとき，t のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) $g(t)=\dfrac{1}{2}(-t^3+4t^2+3t-4)$ $(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$ とおく．

$$g'(t)=\frac{1}{2}(-3t^2+8t+3)=-\frac{1}{2}(3t+1)(t-3)$$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $g(t)$ の増減は下表となる．

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$g(-\sqrt{2})=\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+8-3\sqrt{2}-4)=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

$$g(\sqrt{2})=\frac{1}{2}(-2\sqrt{2}+8+3\sqrt{2}-4)=\frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{27}+\frac{4}{9}-1-4\right)=-\frac{61}{27}$$

$g(t)$ の最大値，最小値と $f(x)$ の最大値，最小値は一致するから，$f(x)$ の最大値，最小値は

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}}$，　**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{61}{27}}$　　……(答)

である．