k を正の実数の定数とする．座標平面上に，曲線 $C : y = x^3 - 5x$ と直線 $l : y = x + k$ があり，C と l がちょうど 2 個の共有点をもつとする．

(i) k の値を答えなさい．

(ii) 2 個の共有点の間の距離を答えなさい．

(25 大阪医薬大 薬 A 3(2))

【答】

(i) $k = 4\sqrt{2}$

(ii) 6

【解答】

$$C : y = x^3 - 5x$$

$$l : y = x + k$$

(i) C と l がちょうど 2 個の共有点をもつ条件は，l が C の接線となることである．

$$y' = 3x^2 - 5$$

より，C 上の点 $(t,\ t^3 - 5t)$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 5)(x - t) + t^3 - 5t$$

$$\therefore\quad y = (3t^2 - 5)x - 2t^3$$

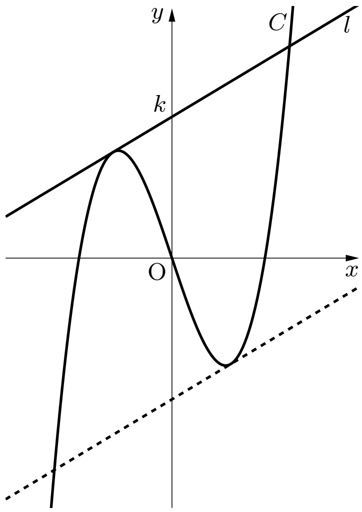
であり，これが l と一致する条件は

$$\begin{cases} 3t^2 - 5 = 1 \\ -2t^3 = k \end{cases}$$

である．$k > 0$ であることと第 2 式より $t < 0$ であり

$$t = -\sqrt{2},\ \boldsymbol{k = 4\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



- C と l がちょうど 2 個の共有点をもつ条件は

  $$x^3 - 5x = x + k\ (k > 0)$$

  $$\therefore\quad x^3 - 6x = k$$

  が異なる 2 つの実数解をもつこと，すなわち，曲線 $y = x^3 - 6x$ と直線 $y = k\ (k > 0)$ が 2 つの共有点をもつことである．$f(x) = x^3 - 6x$ とおく．

  $$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$$

  であり，$y = f(x)$ の増減は下表となる．

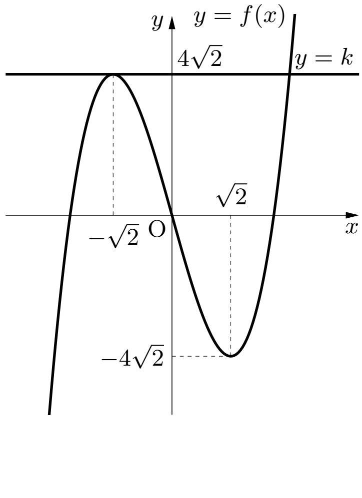
x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

  $$f(\pm\sqrt{2}) = \pm 2\sqrt{2} - 6(\pm\sqrt{2}) = \pm 4\sqrt{2}$$

  であり，$y = f(x)$ のグラフは右図となる．$k > 0$ に注意すると，求める k の値は

  $$k = 4\sqrt{2}$$

  である．



(ii) $k = 4\sqrt{2}$ のとき，共有点の x 座標は

$$
\begin{aligned}
&x^3 - 6x = 4\sqrt{2} \\
&(x + \sqrt{2})^2(x - 2\sqrt{2}) = 0 \\
\therefore\quad &x = -\sqrt{2}\ (\text{重解}),\ 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

である．直線 l の傾きが 1 であることに注意すると，2 個の共有点の間の距離は

$$(2\sqrt{2} - (-\sqrt{2})) \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = \mathbf{6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．