

座標平面上に、放物線 $C : y = x^2$ と点 $P(-2, -5)$ があり、 P から C に引いた 2 本の接線のうち、傾きが正であるものを l とする。

(i) l の方程式を答えなさい。

(ii) C と l と y 軸で囲まれる図形の面積を答えなさい。

(25 大阪医薬大 薬 A 2(2))

【答】

(i) $y = 2x - 1$

(ii) $\frac{1}{3}$

【解答】

$$C : y = x^2$$

(i) $P(-2, -5)$ を通る直線のうち y 軸と平行でないものは、実数 m を用いて

$$y = m(x + 2) - 5$$

とおくことができる。この直線と C が接するのは

$$x^2 = m(x + 2) - 5$$

$$x^2 - mx + 5 - 2m = 0 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

が重解をもつときであるから

$$m^2 - 4 \cdot (5 - 2m) = 0$$

$$m^2 + 8m - 20 = 0$$

$$(m + 10)(m - 2) = 0$$

求める接線 l の傾きは正であるから

$$m = 2$$

であり、 l の方程式は

$$y = 2(x + 2) - 5$$

$$\therefore l : y = 2x - 1 \quad \dots \dots \text{(答)}$$

である。

(ii) C と l の接点の x 座標は

$$x^2 = 2x - 1$$

$$(x - 1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

であり、 C と l と y 軸で囲まれる図形は右図の斜線部分である。面積 S は

$$S = \int_0^1 \{x^2 - (2x - 1)\} dx$$

$$= \int_0^1 (x - 1)^2 dx$$

$$= \left[\frac{(x - 1)^3}{3} \right]_0^1$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \quad \dots \dots \text{(答)}$$

である。

