座標平面において，$y=x^2-1$ で表される放物線を C とする．C 上の点 P における接線を ℓ とする．ただし，点 P は y 軸上にはないものとする．O を原点とし，放物線 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S，放物線 C と接線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を T とする．$S-T$ の最大値を求めよ．

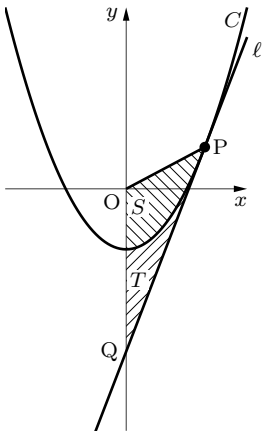
(25 大阪大 文系 3)

【答】 $\dfrac{1}{3}$

【解答】

$$C : y=x^2-1$$

$$y'=2x$$



C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2-1)$ $(p \neq 0)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=2p(x-p)+p^2-1$$

$$\therefore\quad \ell : y=2px-p^2-1$$

である．ℓ と y 軸との交点を Q とおくと，Q の座標は

$$\mathrm{Q}\big(0,\ -p^2-1\big)$$

であり，△OPQ の面積 $S+T$ は

$$S+T=\frac{1}{2}(p^2+1)|p|$$

C は y 軸に関して対称であるから，$p>0$ として考える．このとき

$$S+T=\frac{1}{2}(p^2+1)p$$

である．また

$$T=\int_0^p \{(x^2-1)-(2px-p^2-1)\}\,dx$$

$$=\int_0^p (x^2-p)^2\,dx=\left[\frac{(x-p)^3}{3}\right]_0^p=\frac{p^3}{3}$$

であるから

$$S=(S+T)-T=\frac{1}{2}(p^2+1)p-\frac{p^3}{3}=\frac{p^3}{6}+\frac{p}{2}$$

である．したがって

$$S-T=\left(\frac{p^3}{6}+\frac{p}{2}\right)-\frac{p^3}{3}=-\frac{p^3}{6}+\frac{p}{2}$$

である．$f(p)=-\dfrac{p^3}{6}+\dfrac{p}{2}$ $(p>0)$ とおくと

$$f'(p)=-\frac{p^2}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(p+1)(p-1)$$

であるから，$p>0$ における $f(p)$ の増減は下表となる．

p	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(p)$		$+$	0	$-$
$f(p)$		$\nearrow$		$\searrow$

$$f(1)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

よって，$S-T$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ である， ……(答)