$t>0$ を実数とし，放物線 $C: y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ をとる．また，点 P における C の接線を ℓ_1 とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 直線 ℓ_1 と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1，直線 ℓ_1 と x 軸および放物線 C で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ を求めよ．

(2) 点 P を通り，y 切片が正である直線を ℓ_2 とする．直線 ℓ_1 と直線 ℓ_2 および y 軸で囲まれた図形の面積が放物線 C で 2 等分されるとき，直線 ℓ_2 の方程式を求めよ．

(25 茨城大 教育・地域未来共創 2)

【答】

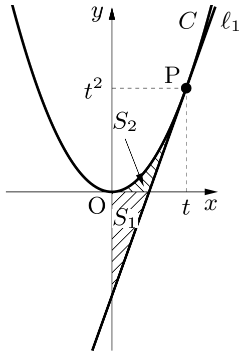
(1) $3:1$

(2) $y=\dfrac{2t}{3}x+\dfrac{t^2}{3}$

【解答】

$$C: y=x^2$$

(1) $y'=2x$ であり，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t>0)$ における C の接線 ℓ_1 の方程式は



$$y=2t(x-t)+t^2$$

$$\therefore\quad \ell_1: y=2tx-t^2$$

である．ℓ_1 と x 軸，y 軸との交点の座標はそれぞれ

$$\left(\frac{t}{2},\ 0\right),\ (0,\ -t^2)$$

であるから，直線 ℓ_1 と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積 S_1，直線 ℓ_1 と x 軸および放物線 C で囲まれた図形の面積 S_2 はそれぞれ

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}\cdot t^2=\frac{t^3}{4}$$

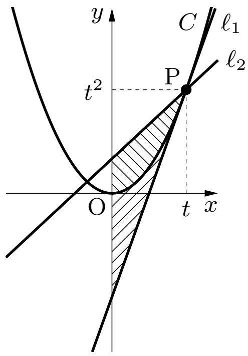
$$S_2=\int_0^t x^2\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}\cdot t^2=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^t-\frac{t^3}{4}\quad(\because\ (1))=\frac{t^3}{3}-\frac{t^3}{4}=\frac{t^3}{12}$$

である．よって

$$S_1:S_2=\frac{t^3}{4}:\frac{t^3}{12}=\mathbf{3:1}$$ ……(答)

である．

(2) ℓ_2 の傾きを m とおくと，ℓ_2 の方程式は



$$y=m(x-t)+t^2$$

$$\therefore\quad \ell_2: y=mx-tm+t^2$$

である．ただし，ℓ_2 の y 切片は正であるから m は

$$-tm+t^2>0\qquad\therefore\quad m<t\qquad\cdots\cdots ①$$

を満たす．

直線 ℓ_1 と直線 ℓ_2 および y 軸で囲まれた図形の面積は放物線 C で 2 等分されるから

$$\int_0^t\{(mx-tm+t^2)-x^2\}\,dx=S_1+S_2$$

$$\left[m\frac{x^2}{2}-(tm-t^2)x-\frac{x^3}{3}\right]_0^t=\frac{t^3}{4}+\frac{t^3}{12}$$

$$m\frac{t^2}{2}-(tm-t^2)t-\frac{t^3}{3}=\frac{t^3}{3}$$

$$-\frac{t^2}{2}m+\frac{t^3}{3}=0$$

$t > 0$ より

$$m = \frac{2t}{3}$$

であり，これは ① を満たす．

よって，ℓ_2 の方程式は

$$\boldsymbol{y = \frac{2t}{3}x + \frac{t^2}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ℓ_1，ℓ_2 および y 軸とで囲まれた三角形の面積を考えると，条件は

$$\frac{1}{2}(t^2 + (-tm + t^2)) \cdot t = 2(S_1 + S_2)$$

でもある．これを用いれば積分計算することなく m の値を求めることができる．

$$t^3 - \frac{t^2}{2}m = 2\left(\frac{t^3}{4} + \frac{t^3}{12}\right)$$

$$\therefore \quad m = \frac{2}{t^2}\left(t^3 - \frac{2t^3}{3}\right) = \frac{2t}{3}$$

である．以下【解答】と同じ．