曲線 $y=x^2$ を C_1 とし，C_1 を x 軸方向に 2，y 軸方向に 6 だけ平行移動して得られる曲線を C_2 とする．

(1) C_1 と C_2 の交点は $\left(\dfrac{\boxed{52}}{\boxed{53}},\ \dfrac{\boxed{54}\boxed{55}}{\boxed{56}}\right)$ である．

(2) 点 $(a,\ a^2)$ における C_1 の接線 ℓ が C_2 にも接するとき，$a=\dfrac{\boxed{57}}{\boxed{58}}$ であり，ℓ の方程式は $y=\boxed{59}x-\dfrac{\boxed{60}}{\boxed{61}}$ である．また，このとき ℓ と C_2 の接点は $\left(\dfrac{\boxed{62}}{\boxed{63}},\ \dfrac{\boxed{64}\boxed{65}}{\boxed{66}}\right)$ である

(3) (2) で求めた接線 ℓ と 2 曲線 C_1, C_2 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{67}}{\boxed{68}}$ である．

(25 青山学院大 全学部 文系 4)

【答】

	52	53	5455	56	57	58	59	60	61	62	63	6465	66	67	68
	5	2	25	4	3	2	3	9	4	7	2	33	4	2	3

【解答】

$$C_1 : y=x^2$$

$$C_2 : y=(x-2)^2+6$$

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$x^2=(x-2)^2+6$$

$$0=-4x+10$$

$$\therefore\quad x=\frac{5}{2}$$

であるから，交点の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{5}{2}},\ \boldsymbol{\frac{25}{4}}\right)$$ ……(答)

である．

(2) $(x^2)'=2x$ であり，点 $(a,\ a^2)$ における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y=2a(x-a)+a^2$$

$$\therefore\quad \ell : y=2ax-a^2$$

である．ℓ が C_2 にも接することから

$$(x-2)^2+6=2ax-a^2$$

$$\therefore\quad x^2-2(a+2)x+a^2+10=0$$

は重解をもつ．判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-(a^2+10)=4a-6$$

であり，$D=0$ となることから

$$a=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$ ……(答)

である．よって，ℓ の方程式は

$$y = \mathbf{3}x - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，このとき ℓ と C_2 の接点の x 座標は

$$x = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

であり，y 座標は

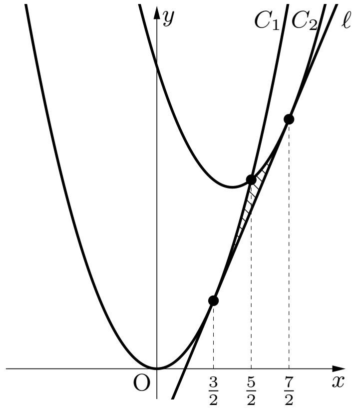
$$y = 3 \cdot \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \frac{33}{4}$$

である．よって，接点の座標は

$$\left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{33}}{\mathbf{4}}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 接線 ℓ と 2 曲線 C_1，C_2 で囲まれた図形は右図の斜線部分であり，面積 S は



$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left\{x^2 - \left(3x - \frac{9}{4}\right)\right\} dx \\
&\qquad + \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} \left\{(x-2)^2 + 6 - \left(3x - \frac{9}{4}\right)\right\} dx \\
&= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)^3\right]_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．