xy 平面上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円のうち，y 座標が正の部分を C_1 とする．C_1 と放物線 $C_2 : y = x^2 + \dfrac{5}{4}$ の 2 つの交点のうち，x 座標が正の点を P，x 座標が負の点を Q とする．

(1) 点 P の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{33}}}{\boxed{34}},\ \boxed{35}\right)$ である．

(2) $\angle\mathrm{PAQ} = \dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}}\pi$ である．

(3) 線分 PQ と C_2 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{38}}}{\boxed{39}}$ である．

また，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{40}}{\boxed{41}}\pi - \dfrac{\sqrt{\boxed{42}}}{\boxed{43}}$ である．

(25 青山学院大 全学部 理系 3)

【答】

33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
3	2	2	1	3	3	2	1	2	3	4

【解答】

$$C_1 : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 3 \text{ かつ } y > 0$$

$$C_2 : y = x^2 + \frac{5}{4}$$

(1) C_1 と C_2 の共有点の y 座標は

$$y - \frac{5}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 3$$

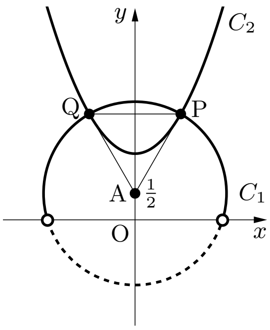
$$y^2 - 1 = 3$$

$$\therefore\quad y = 2\ (>0)$$

であり，x 座標は

$$x^2 + \frac{5}{4} = 2 \qquad \therefore\quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．x 座標が正の交点が P，x 座標が負の交点が Q であるから，P の座標は



$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2}\right)$$ ……(答)

である．

(2) $\triangle\mathrm{APQ}$ について

$$\mathrm{PQ} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

P，Q は y 軸に関して対称であるから，$\mathrm{AP} = \mathrm{AQ}$ であり

$$\mathrm{AP} = \mathrm{AQ} = \sqrt{\frac{3}{4} + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

であるから，$\triangle\mathrm{APQ}$ は正三角形である．よって

$$\angle\mathrm{PAQ} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}\pi$$ ……(答)

である．

(3) 線分 PQ と C_1 で囲まれた図形の面積を S_1，線分 PQ と C_2 で囲まれた図形の面積を S_2 とおくと

$$\begin{aligned} S_1 &= (\text{扇形 APQ の面積}) - (\triangle\text{APQ の面積}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{2 - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right)\right\} dx \\ &= -\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

また，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}}\pi - \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．