a, b を実数とする．x の 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ のすべての解が実数で，かつその値が 0 以上 1 以下になるような a, b の条件を求めよ．また，その条件が表す領域を ab 平面上に図示し，面積を求めよ．

(25 青山学院大 社会情報 B 5)

【答】 $\begin{cases} b \leqq \dfrac{a^2}{4} \\ 0 \leqq a \leqq 2 \\ b \geqq 0 \\ b \geqq a-1 \end{cases}$ ，図は略，面積は $\dfrac{1}{6}$

【解答】

$$x^2-ax+b=0 \ (a,\ b \text{ は実数}) \qquad \cdots\cdots (*)$$

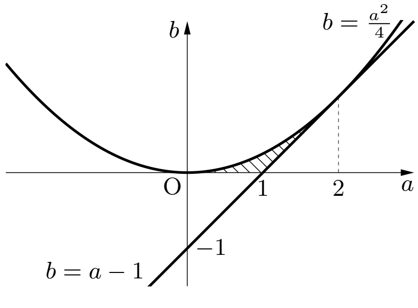
$f(x)=x^2-ax+b$ とおく．$(*)$ のすべての解が実数で，かつその値が 0 以上 1 以下になるための条件は，$f(x)=0$ の判別式および $y=f(x)$ のグラフと x 軸との位置関係を考えると

$$\begin{cases} \text{判別式}: a^2-4b \geqq 0 \\ \text{軸の位置}: 0 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 1 \\ \text{端点の符号}: f(0)=b \geqq 0 \text{ かつ } f(1)=1-a+b \geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad (**) \begin{cases} b \leqq \dfrac{a^2}{4} \\ 0 \leqq a \leqq 2 \\ b \geqq 0 \\ b \geqq a-1 \end{cases}$$

である．$b=\dfrac{a^2}{4}$ と $b=a-1$ の共有点の a 座標は

$$\frac{a^2}{4}=a-1$$
$$a^2-4a+4=0$$
$$(a-2)^2=0 \qquad \therefore \quad a=2 \ (\text{重解})$$



であり，$b=\dfrac{a^2}{4}$ と $b=a-1$ は $a=2$ で接する．

条件 $(**)$ を満たす領域を ab 平面に図示すると右図の斜線部分となる．

面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left\{ \frac{a^2}{4}-(a-1) \right\} da - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\ &= \int_0^2 \frac{1}{4}(a-2)^2 da - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{(a-2)^3}{3} \right]_0^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}-\frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．